

АСИМПТОТИКА УЛЬТРАЗВУКОВОГО ЗОНДИРУЮЩЕГО ПОЛЯ В АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛАХ

© 2025 г. Е.В. Глушков^{1,*}, Н.В. Глушкова^{1,**}

¹ *Институт математики, механики и информатики, Кубанский государственный университет,
Россия 350040 Краснодар, ул. Ставропольская, 149
E-mail: *evg@math.kubsu.ru; **nvg@math.kubsu.ru*

Поступила в редакцию 25.01.2025; после доработки 21.02.2025

Принята к публикации 25.02.2025

Для моделирования волнового поля ультразвукового преобразователя в материалах с сильной анизотропией (монокристаллические сплавы турбинных лопаток, композиты, сварные соединения и др.) строится физически наглядное асимптотическое представление для квазисферических объемных волн, возбуждаемых поверхностным источником колебаний в полупространстве с произвольной анизотропией упругих свойств. Асимптотика получена методом стационарной фазы из интегрального представления решения в виде контурных интегралов обратного преобразования Фурье. Особенности ее вывода и численной реализации обсуждаются на примере трансверсально-изотропного композитного материала и монокристаллического сплава никеля с кубической анизотропией. Зависимость стационарных точек от направления здесь сложнее, чем в изотропном случае, вплоть до появления множественных стационарных точек и складок, дающих дополнительные волновые фронты и каустики. Проводится сравнение с характеристиками плоских волн, которые описываются собственными решениями классического уравнения Кристоффеля. Показано, что несмотря на явление множественности волновых фронтов, варьирование ориентацией плоских волн позволяет получить те же векторы групповой скорости, что и у каждой из волн, описываемых асимптотикой.

Ключевые слова: ультразвуковое зондирование, анизотропное упругое полупространство, матрица Грина, поверхностная нагрузка, контурные интегралы, метод стационарной фазы, квазисферические объемные волны.

ASYMPTOTICS OF ULTRASONIC SOUNDING FIELD IN ANISOTROPIC MATERIALS

© 2025 E.V. Glushkov^{1,*}, N.V. Glushkova^{1,**}

¹ *Institute for Mathematics, Mechanics and Informatics, Kuban State University,
Russia 350040 Krasnodar, Stavropolskaya str., 149
E-mail: *evg@math.kubsu.ru; **nvg@math.kubsu.ru*

To model the wave field of an ultrasonic transducer in materials with strong anisotropy (monocrystalline alloys of turbine blades, composite materials, welded joints, etc.), a physically descriptive asymptotic representation is obtained for quasi-spherical body waves excited by a surface source in an arbitrarily anisotropic elastic half-space. The asymptotics is derived by the stationary phase method from the integral representation of the solution in terms of contour integrals of the inverse Fourier transform. The peculiarities of their derivation and numerical implementation are discussed on the examples of a transversely isotropic composite material and a monocrystalline nickel alloy with cubic anisotropy. The dependence of the stationary points on the direction is more complicated here than in the isotropic case, up to the appearance of multiple stationary points and folds, giving rise to additional wave fronts and caustics. A comparison is made with the plane waves described by eigensolutions of the classical Christoffel equation. It is shown that, despite the phenomenon of multiple wave fronts, varying the plane-wave orientation allows us to obtain the same group velocity vectors as for any of the waves described by the asymptotics.

Keywords: ultrasonic inspection, anisotropic elastic half-space, Green's matrix, surface load, path integrals, stationary phase method, quasi-spherical body waves.

DOI: 10.31857/S0130308225030029

ВВЕДЕНИЕ

Задачи моделирования возбуждения и распространения объемных упругих волн в материалах с сильной анизотропией возникают при ультразвуковом (УЗ) неразрушающем контроле турбинных лопаток из жаропрочных монокристаллических сплавов [1, 2], композитных материалов [3, 4] и сварных соединений [5, 6]. Более широко решение аналогичных задач лежит в основе многих методов сейсмоакустики, акустоэлектроники, акустооптики, пьезосенсорики и других волновых приложений.

Начиная с пионерских работ 1950-х — 1960-х гг. [7—11], общие закономерности распространения объемных волн в материалах с различным типом анизотропии к настоящему времени хорошо изучены [12—16]. Их фазовые и групповые скорости, а также поляризация колебаний,

определяются методами модального анализа, собственные решения которого, однако, дают амплитуду колебаний только с точностью до постоянного множителя. Для расчета амплитудно-частотных характеристик волновых полей, возбуждаемых заданным источником, в настоящее время широко используются программные пакеты, реализующие прямые численные методы, базирующиеся на сеточной аппроксимации, например, метод конечных элементов (МКЭ). Но такой подход не очень хорошо приспособлен для моделирования волновых процессов. Как правило, он требует больших вычислительных затрат и не дает ясного физического представления для отдельных волн. Их выделение из суммарного решения требует специальной постпроцессорной обработки полученного массива числовых данных.

Наряду с МКЭ, амплитудно-частотные характеристики волнового поля, возбуждаемого заданной объемной силой $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, можно получить в виде свертки $\mathbf{u} = (\mathbf{G} * \mathbf{f})(\mathbf{x})$, используя матрицу фундаментальных решений (матрицу Грина) $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, сформированную из векторов-столбцов смещений, генерируемых в безграничной упругой среде сосредоточенными силами, приложенными вдоль координатных осей [8]. Явное представление матрицы \mathbf{G} несложно получить с помощью интегрального преобразования Фурье по всем пространственным координатам, а применение теории вычетов и метода стационарной фазы дает ее асимптотику в дальней зоне.

В случае полупространства набегание на свободную поверхность каждой из объемных волн заглуженного источника порождает по три отраженных волны, характеристики которых определяются, исходя из законов Снеллиуса. На этой основе для построения диаграмм направленности волн, возбуждаемых поверхностной нагрузкой, еще в 1990-х годах был предложен подход, базирующийся на суперпозиции полей подповерхностных точечных источников [17, 18]. Однако их выбор неоднозначен и представляет сложную самостоятельную задачу, поэтому заметного развития данный подход не получил. Описание математической техники и обзор, показывающий современное состояние исследований по данной тематике, собраны в монографии [1].

В настоящей работе вместо представления через матрицу \mathbf{G} предлагается использование явного интегрального представления решения соответствующей краевой задачи через матрицу Грина \mathbf{K} рассматриваемого полупространства и параметры поверхностной нагрузки [19] (см. ниже представления (4), (8)). Асимптотика сферических объемных волн, возбуждаемых поверхностным источником в многослойном изотропном полупространстве, была получена из такого интегрального представления еще в 1980-х гг. [20]. Эффективные алгоритмы построения матрицы Грина для сред с произвольной анизотропией [21, 22] дают возможность получить аналогичные асимптотические представления и для анизотропного полупространства.

Первые варианты реализации данного подхода были представлены на XXXV Сессии РАО [23] и Днях Дифракции 2023 [24]. В настоящей работе, направленной в первую очередь на анализ формирования волновых фронтов поля УЗ преобразователя в монокристаллических никелевых сплавах турбинных лопаток [1, 2], дается более подробное описание вывода и численной реализации асимптотики. Данные результаты создают, в частности, основу для строгого учета анизотропии в анализе отраженного поля от внутренних мало контрастных границ изделий из данных материалов, проведенном в предыдущей работе [25] в рамках изотропной аппроксимации разноориентированных анизотропных сплавов.

В качестве верификации, в дополнение к проведенному ранее сопоставлению с результатами численного интегрирования, показано совпадение векторов групповых скоростей квазисферических объемных волн, описываемых асимптотическими представлениями, с групповыми скоростями, полученными методами классического модального анализа. Преимущество полученных асимптотических представлений состоит в том, что в отличие от собственных (модальных) решений они дают амплитудно-частотные характеристики с учетом источника и не требуют предварительного определения ориентации фронта волны для получения значения групповой скорости в требуемом направлении.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Рассматриваются установившиеся гармонические колебания $\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ упругого анизотропного полупространства, занимающего в декартовых координатах $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ объем $|x|, |y| < \infty, z \leq 0$ (рис. 1). Источником колебаний является нагрузка $\mathbf{q}(x, y)e^{-i\omega t}$, приложенная к поверхности $z = 0$ в некоторой ограниченной области Ω . Компоненты вектора комплексной амплитуды $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = (u_1, u_2, u_3)$ удовлетворяют уравнениям эластодинамики:

$$C_{ijkl}u_{l,jk} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

с граничными условиями:

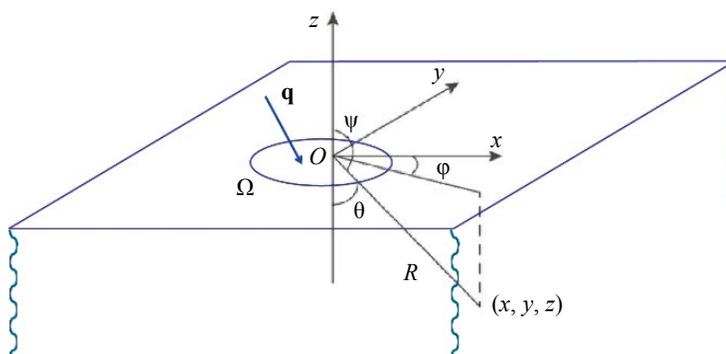


Рис. 1. Геометрия задачи.

$$\tau_{i3} = C_{i3kl} u_{l,k} = q_i, \quad i=1, 2, 3 \quad \text{при } z=0. \quad (2)$$

В (1) и (2) использована тензорная запись с цифровой индексацией координат, суммированием по одинаковым индексам и обозначением производных по координатам соответствующими индексами после запятой: $C_{ijkl} u_{j,k} = \sum_j \sum_k C_{ijkl} \partial u_j / \partial x_k$ и т.п.

На бесконечности:

$$|\mathbf{u}| \rightarrow 0 \quad \text{при } R = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Для идеально-упругой среды к последнему условию добавляется условие излучения, следующее из принципа предельного поглощения [26]. Здесь u_i и q_i — компоненты векторов смещений \mathbf{u} и заданной нагрузки \mathbf{q} ; τ_{ij} — тензор напряжений; C_{ijkl} — упругие модули; ρ — плотность среды; $\omega = 2\pi f$ — круговая частота; f — частота; гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ в дальнейшем опущен.

В рамках интегрального подхода [19] решение краевой задачи (1) — (3) выписывается в виде обратного преобразования Фурье F_{xy}^{-1} от произведения фурье-символов матрицы Грина $\mathbf{K} = F_{xy}[\mathbf{k}]$ и вектора поверхностной нагрузки $\mathbf{Q} = F_{xy}[\mathbf{q}]$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = F_{xy}^{-1}[\mathbf{U}] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, z) \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{U} = \mathbf{K}\mathbf{Q} = F_{xy}[\mathbf{u}]$ — фурье-символ вектора смещений; F_{xy} — оператор преобразования Фурье по горизонтальным координатам x и y с параметрами преобразования α_1 и α_2 ; контуры интегрирования Γ_1, Γ_2 идут вдоль вещественных осей α_1, α_2 , отклоняясь в комплексную плоскость для обхода вещественных полюсов в соответствии с принципом предельного поглощения. Столбцами матрицы Грина \mathbf{k} являются решения \mathbf{u}_j для единичных сосредоточенных нагрузок $\mathbf{q} = \mathbf{q}_j = \delta(x, y) \mathbf{i}_j, j = 1, 2, 3$, направленных вдоль координатных орт \mathbf{i}_j ; δ — дельта-функция Дирака. Для произвольной нагрузки \mathbf{q} решение представимо в виде свертки \mathbf{k} и \mathbf{q} по x, y : $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (\mathbf{k} * \mathbf{q})(\mathbf{x})$ или в фурье-символах $\mathbf{U} = \mathbf{K}\mathbf{Q}$.

Общая схема вывода представлений (4) для слоистых анизотропных материалов описана в работах [21, 22]. Основной идеей, позволившей сформулировать алгоритм построения \mathbf{K} в компактной матричной форме, является замена производных по пространственным координатам $\partial/\partial x_j$ на их фурье-символы $-i\alpha_j$, в том числе и для производной по $z = x_3$, по которой преобразование Фурье формально неприменимо из-за наличия поверхностей и границ раздела слоев $z = \text{const}$ [27].

Преобразование Фурье F_{xyz} по всем трем координатам приводит уравнения (1) к виду:

$$[\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) - \rho\omega^2 \mathbf{I}] \mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}) = 0, \quad (5)$$

в котором $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ — матрица 3×3 с элементами $b_{ij} = C_{ijkl} \alpha_k \alpha_l$; \mathbf{I} — единичная матрица; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — вектор параметров преобразования Фурье. При этом параметр α_3 следует понимать как операторную запись производной по $z = x_3$ в соответствии со свойством преобразования производных $F_{x_j}[\partial \mathbf{u} / \partial x_j] = -i\alpha_j \mathbf{U}$. Фактически (5) — это компактная запись системы обык-

новенных дифференциальных уравнений второго порядка с производными по z . Подстановка $\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2, z) = \mathbf{m}(\alpha_1, \alpha_2)e^{\sigma z}$ в систему (5) приводит к задаче на собственные значения:

$$[\mathbf{B}(\alpha_1, \alpha_2, i\sigma) - \rho\omega^2\mathbf{I}]\mathbf{m} = 0. \quad (6)$$

Здесь в представлении элементов матрицы \mathbf{B} параметр $\alpha_3 = i\sigma$.

Характеристическое уравнение $\det(\mathbf{B} - \rho\omega^2\mathbf{I}) = 0$ — это полином шестого порядка относительно $\sigma = -i\alpha_3$. Он имеет три пары корней $\pm\sigma_n$, $n = 1, 2, 3$, расположенных в комплексной плоскости симметрично относительно начала координат. Для выполнения условия (3) из них следует оставить только те, которые расположены в правой полуплоскости $\text{Re } \sigma > 0$ ($e^{\sigma z} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$). Для чисто мнимых корней ($\text{Re } \sigma_n = 0$) используется условие $\text{Im } \sigma_n < 0$, вытекающее из принципа Зоммерфельда для проекции фазовой скорости на ось z . При таком выборе фазовая функция в экспоненте $e^{i(\text{Im } \sigma_n z - \omega t)}$ описывает движение фронта от источника вниз: $\dot{z} = \omega / \text{Im } \sigma_n < 0$.

Однако для анизотропных материалов в некоторых случаях горизонтальная компонента скорости квазисферических объемных волн, которые описываются выведенным ниже асимптотическим представлением, оказывается при этом направленной к источнику, что нарушает условие Зоммерфельда в радиальном направлении $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$, $z = \text{const}$ (см. численные примеры ниже). Ситуация напоминает известное явление обратных бегущих волн в упругом слое [28, 29], у которых фазовая и групповая скорости направлены противоположно. Использование для них условия Зоммерфельда приводит к выбору бегущей волны с групповой скоростью, направленной к источнику, т.е. несущей к нему энергию из бесконечности. Поэтому для физически корректной постановки вместо условия Зоммерфельда используется принцип предельного поглощения, который обеспечивает выбор направления обхода вещественных полюсов контурами Γ_1, Γ_2 в представлении (4), так что вычеты в них дают бегущие волны, переносящие энергию от источника на бесконечность. Аналогично, для объемных волн из чисто мнимых корней уравнения (6) следует выбрать те, которые при введении поглощения смещаются с мнимой оси вправо ($\text{Re } \sigma_n > 0$), обеспечивая выполнение условия (3).

Общее решение системы (3) имеет вид:

$$\mathbf{U} = \sum_{n=1}^3 t_n \mathbf{m}_n e^{\sigma_n z}, \quad (7)$$

где σ_n и \mathbf{m}_n — собственные значения и соответствующие им нормированные собственные векторы задачи (6), а неизвестные коэффициенты t_n , определяющие амплитуду каждого слагаемого, находятся из линейной алгебраической системы размерности 3×3 , возникающей при подстановке данного представления в преобразованные по Фурье граничные условия (2).

АСИМПТОТИКА ОБЪЕМНЫХ ВОЛН

Объемные волны, возбуждаемые поверхностным источником, распространяются от него вглубь упругого полупространства. Зависимость от глубины z входит в матрицу \mathbf{K} (и соответственно в $\mathbf{U} = \mathbf{K}\mathbf{Q}$) через экспоненты $e^{\sigma_n z}$. Поскольку комплексные показатели с $\text{Re } \sigma_n > 0$ дают экспоненциально убывающий вклад в интеграл (4) при $z \rightarrow -\infty$, интерес для вывода асимптотики представляет только часть интеграла по области интегрирования D_n , в которой σ_n чисто мнимая. Вместо представления (4) достаточно рассмотреть интегралы по D_n от слагаемых

$\mathbf{K}_n \mathbf{Q} e^{\sigma_n z}$, где в соответствии со структурой общего решения \mathbf{K}_n : $\mathbf{K} = \sum_{n=1}^3 \mathbf{K}_n e^{\sigma_n z}$. Соответственно, суммарное волновое поле \mathbf{u} складывается из трех составляющих: $\mathbf{u} = \sum_{n=1}^3 \mathbf{u}_n$.

В случае полупространства удобно сделать расчетные формулы независимыми от частоты, связав все линейные размеры с характерной длиной волны $\lambda_0 = 2\pi/\kappa_0$, где $\kappa_0 = \omega/c_0$ — характерное волновое число; c_0 — характерная скорость. Для этого в интегралах по α_1, α_2 достаточно сделать замену $\alpha_1 = \kappa_0\beta_1$, $\alpha_2 = \kappa_0\beta_2$. В результате задача сводится к рассмотрению безразмерных интегралов

$$\tilde{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{\tilde{D}_n} \tilde{\mathbf{U}}_n(\beta_1, \beta_2) e^{i\tilde{\sigma}_n(\beta_1, \beta_2)\tilde{R}} d\beta_1 d\beta_2, \quad (8)$$

в которых $\tilde{\mathbf{u}}_n = \kappa_0 \mathbf{u}_n$, $\tilde{\mathbf{U}}_n = \kappa_0^3 \mathbf{U}_n$, $\tilde{R} = \kappa_0 R$, $\tilde{\sigma}_n = \hat{\sigma}_n / \kappa_0$, $\tilde{S}_n = S_n / \kappa_0$ и т.п.; волна над безразмерными величинами в дальнейшем опущена.

В изотропном случае корни σ_n находятся в явном виде: $\sigma_n = \sqrt{\beta^2 - s_n^2}$, где $\beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$, $s_n = 1/c_n$ — медленности продольных ($n = 1$) или поперечных ($n = 2, 3$) волн; c_n — их скорости; $\kappa_n = \omega/c_n$ — волновые числа. Области D_n — это круги радиуса s_n с центром в начале координат ($\beta < s_n$); вещественные функции $\hat{\sigma}_n(\beta_1, \beta_2) = -\text{Im} \sigma_n(\beta_1, \beta_2) = \sqrt{s_n^2 - \beta^2}$ — полусферы над D_n . В анизотропном случае поверхности $\hat{\sigma}_n = -\text{Im} \sigma_n$ становятся отличными от полусфер, а их носители D_n — от круговых областей, но остаются ограниченными с центром симметрии в начале координат $\beta = 0$. Примеры поверхностей $\hat{\sigma}_n$ и их носителей D_n для материалов с различным видом анизотропии показаны ниже на рис. 3 и 4.

Фазовые функции S_n , получающиеся из показателей экспонент $e^{-i\hat{\sigma}_n z} e^{-i(\beta_1 x + \beta_2 y)}$, в сферических координатах (R, φ, θ) принимают вид:

$$S_n = \hat{\sigma}_n \cos \theta - (\beta_1 \cos \varphi + \beta_2 \sin \varphi) \sin \theta. \quad (9)$$

Декартовы и сферические координаты связаны соотношениями:

$$x = R \cos \varphi \sin \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = -R \cos \theta;$$

$$R = |\mathbf{x}| = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = R \sin \theta;$$

$$-\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Известно, что главный вклад в асимптотику осциллирующих интегралов вида (8) дают стационарные точки $\beta_m = (\beta_{m,1}, \beta_{m,2})$, в которых $\nabla S_n = 0$. В соответствии с формулой (2.6) Теоремы 2.1 о вкладе невырожденной стационарной точки [30], главный член асимптотики безразмерных интегралов (8) имеет вид:

$$\mathbf{u}_n = \sum_{m=1}^{M_n} \mathbf{a}_{nm}(\varphi, \theta) e^{iS_{nm}R} / R + O(R^{-2}), \quad R \rightarrow \infty, \quad n = 1, 2, 3, \quad (10)$$

где $\mathbf{a}_{nm} = \frac{1}{2\pi} \mathbf{K}_n(\beta_m) \mathbf{Q}_n(\beta_m) e^{iN_{nm}\pi/4} / \sqrt{|S''_{nm}|}$, $S_{nm} = S_n(\beta_m)$, $S''_{nm} = \left[\frac{\partial^2 S_{nm}}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} \right]_{i,j=1}^2$ — матрица Якоби;

$N_{nm} = N^+ - N^-$ — разность между числом собственных значений матрицы S''_{nm} с положительной и отрицательной вещественной частью; M_n — число стационарных точек β_m для данного номера n .

Слагаемые представления (10) описывают квазисферические волны, в которых безразмерные S_{nm} играют роль медленностей, а фазовые скорости $c_{nm} = 1/S_{nm}$ получаются отнесенными к характерной скорости c_0 , входящей в характерное волновое число $\kappa_0 = \omega/c_0$ (напомним, что здесь R это $\kappa_0 R$). Волновые числа k_{nm} определяются размерными значениями фазовой функции в стационарных точках: $k_{nm} = \kappa_0 \hat{S}_{nm}$. Ввиду их линейной зависимости от ω (т. е. отсутствия дисперсии), групповые скорости v_{nm} каждой моды, как и в изотропном случае, совпадают с фазовыми ($v_{nm} = c_{nm}$). Однако в отличие от изотропного случая их значения, как и число волн M_n , вообще говоря, зависят от рассматриваемого радиального направления (φ, θ).

Исходя из представления (9), уравнение $\nabla S_n = 0$ можно привести к виду, позволяющему получить наглядную геометрическую интерпретацию расположения стационарных точек в зависимости от угла θ . Скалярно домножив его на радиально-направленный единичный вектор $\mathbf{r} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ и ортогональный ему вектор $\mathbf{s} = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$, приходим к системе:

$$\begin{aligned} \partial \hat{\sigma}_n / \partial \mathbf{r} &= (\nabla \hat{\sigma}_n, \mathbf{r}) = \text{tg} \theta \\ \partial \hat{\sigma}_n / \partial \mathbf{s} &= (\nabla \hat{\sigma}_n, \mathbf{s}) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\partial/\partial \mathbf{r}$ и $\partial/\partial \mathbf{s}$ — производные по соответствующим направлениям \mathbf{r} и \mathbf{s} . Первое уравнение системы (11) указывает на то, что в стационарных точках β_m угол наклона касательной к поверхности $\hat{\sigma}_n$ в азимутальном направлении φ должен быть равен углу θ , определяющему отклонение радиуса R от вертикальной оси z (см. рис. 1). А второе уравнение говорит о том, что эти точки касания должны быть точками экстремума кривых, получающихся при сечении поверхности $\hat{\sigma}_n$ в ортогональном направлении $\varphi + \pi/2$.

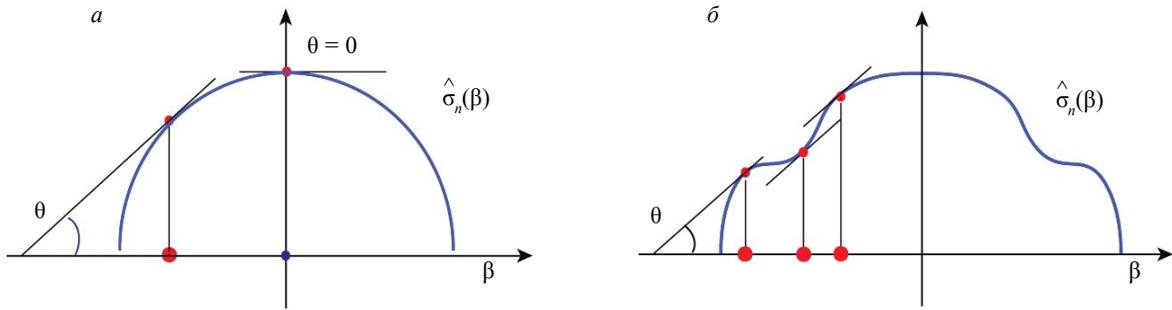


Рис. 2. Схематическая иллюстрация зависимости положения стационарных точек от угла θ в изотропном (а) и анизотропном (б) случаях.

В изотропном случае, когда поверхности $\hat{\sigma}_n$ — полусферы радиуса $s_n = 1/c_n$, для любого φ имеется единственная точка касания под углом θ , проекция которой на плоскость $\mathbf{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ лежит на радиусе $\beta = |\mathbf{\beta}|$ круговой области D_n (рис. 2а). Ее координаты несложно получить аналитически: $\beta_{1,n} = -\cos\varphi \sin\theta/c_n$, $\beta_{2,n} = -\sin\varphi \sin\theta/c_n$. При $\theta = 0$ (направление строго вниз) касательная горизонтальна, точка касания — вершина купола, а стационарная точка совпадает с началом координат: $\mathbf{\beta}_n = 0$. Для любых направлений (φ, θ) значения фазовых функций в стационарных точках остаются постоянными: $S_n(\mathbf{\beta}_n) = s_n = 1/c_n$. В этом случае слагаемые асимптотического представления (10) описывают сферические волны, которые распространяются со скоростью продольных ($n = 1$) и поперечных ($n = 2, 3$) объемных волн и имеют соответствующую поляризацию [20].

В анизотропном случае поверхности $\hat{\sigma}_n(\mathbf{\beta})$ становятся отличными от полусфер, поэтому как значения стационарных точек $\mathbf{\beta}_m$, так и выражающихся через них составляющих асимптотического представления (10), определяются численно. Более того, эти поверхности могут быть невыпуклыми, что делает возможным наличие нескольких стационарных точек для одного угла θ (рис. 2б). Это приводит к эффекту множественности квазисферических волновых фронтов квазипродольных или квазипоперечных объемных волн, распространяющихся в заданном направлении (φ, θ) с групповыми скоростями v_{nm} .

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

При наличии эффективных алгоритмов вычисления подынтегральных функций рассматриваемых интегралов (4)—(8) асимптотические представления (10) позволяют проводить быстрый параметрический анализ амплитудно-частотных характеристик объемных волн, возбуждаемых локализованной поверхностной нагрузкой в упругом полупространстве с произвольной анизотропией. Компьютерная реализация представления (10) осуществлена в виде программного комплекса AnisoBW на языке Fortran в среде Visual Studio.

Для вычисления собственных значений σ_n и векторов \mathbf{m}_n задача (6), получающаяся после замены $\mathbf{a} = \kappa_0 \mathbf{\beta}$, сводится к стандартной проблеме поиска собственных значений вспомогательной матрицы $A(\mathbf{\beta})$ размерности 6×6 :

$$(A - \sigma I)\mathbf{p} = 0. \tag{12}$$

Здесь $\mathbf{p} = [\mathbf{m}, \sigma \mathbf{m}]$ — расширенный собственный вектор длины 6, возникающий при переходе от задачи (5) к системе дифференциальных уравнений первого порядка относительно расширенного вектора неизвестных $\mathbf{V} = [\mathbf{U}, \mathbf{U}']$. Нижние блоки матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ имеют вид $A_{21} = B_2^{-1}(B_0 - \rho I)$ и $A_{22} = B_2^{-1}B_1$, в котором матрицы B_k — коэффициенты разложения матрицы $B(\mathbf{\beta})$ по степеням β_3 : $B = B_0 + \beta_3 B_1 + \beta_3^2 B_2$. Их элементы выписываются в явном виде:

$$\begin{aligned} b_{0,ij} &= C_{i1j1}\beta_1^2 + (C_{i1j2} + C_{i2j1})\beta_1\beta_2 + C_{i2j2}\beta_2^2; \\ b_{1,ij} &= (C_{i3j1} + C_{i1j3})\beta_1 + (C_{i3j2} + C_{i2j3})\beta_2; \\ b_{2,ij} &= C_{i3j3}. \end{aligned}$$

Отметим, что B_2 не зависит от $\mathbf{\beta}$, поэтому B_2^{-1} вычисляется один раз.

В качестве примера на рис. 3, 4 показаны поверхности $\hat{\sigma}_n(\beta_1, \beta_2)$ и их проекции на плоскость (β_1, β_2) (области D_n) для трансверсально-изотропного композитного материала GE (AS4/3502 [31]) и никелевого сплава NS с кубической анизотропией (суперсплав CMSX-4 [1]). Упругие модули C_{pq} и плотность ρ этих материалов даны в табл. 1. В матричных обозначениях Фойгта $C_{pq} = C_{ijkl}$ для $p = i$ при $i = j$ и $p = 9 - i - j$ при $i \neq j$; аналогично $q = k = l$ и $q = 9 - k - l$ при $k \neq l$.

Таблица 1

Упругие коэффициенты C_{pq} (в ГПа) и плотность ρ (в кг/м³)

Материал	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{22}	C_{23}	C_{33}	C_{44}	C_{55}	C_{66}	ρ
GE	130,7	5,2	5,2	13,0	4,5	13,0	13,7	6,0	6,0	1,578
NS	235	142	142	235	142	235	131	131	131	8,720

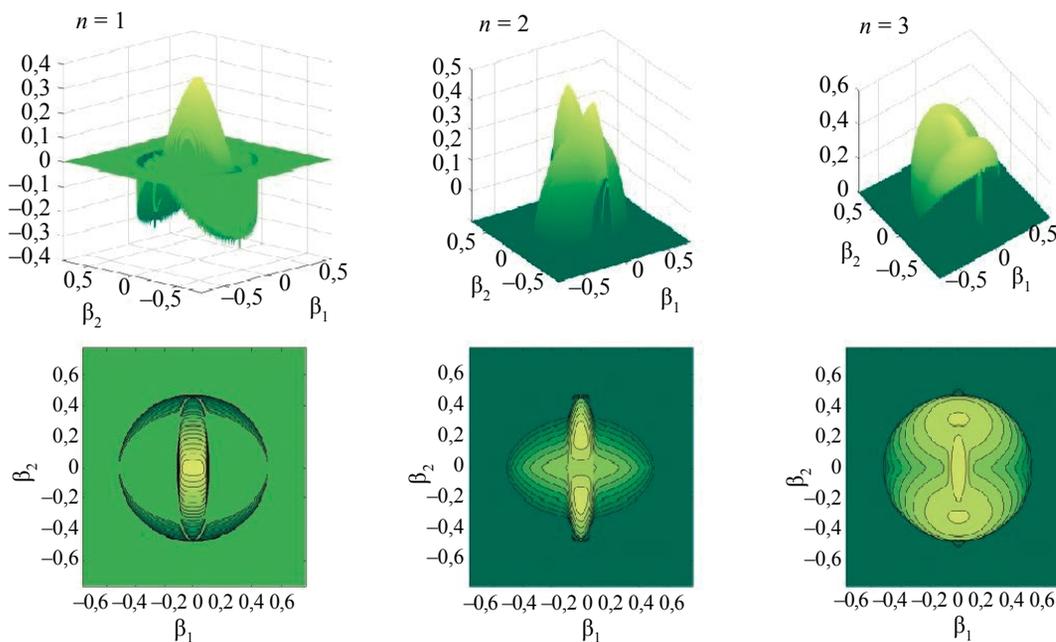


Рис. 3. Поверхности $\hat{\sigma}_n$ (вверху) и их проекции на плоскость (β_1, β_2) (внизу) для трансверсально-изотропного композитного материала GE.

Видно, что эти поверхности $\hat{\sigma}_n$ невыпуклы, т.е. допускают появление множественных стационарных точек и волновых фронтов ($M_n \geq 2$). Интересной особенностью поверхностей $\hat{\sigma}_1$ ($n = 1$) является наличие “крылышек”, опускающихся ниже нулевого уровня. Это пример “нерегулярных” корней, дающих обратные волны. При выборе корней по принципу Зоммерфельда эти “крылышки” должны были бы располагаться вверху над плоскостью (β_1, β_2) : $\hat{\sigma}_n = -\text{Im} \sigma_n > 0$. Но при введении малого внутреннего поглощения такие корни, в отличие от регулярных, смещаются с отрицательной мнимой оси влево ($\text{Re} \sigma_n < 0$), т.е. дают экспоненциальный рост составляющих $e^{\sigma_n z}$ при $z \rightarrow -\infty$. В то время как принцип предельного поглощения требует оставить корень, который расположен на положительной мнимой оси и смещается с нее в первый квадрант ($\text{Re} \sigma_n \geq 0, \text{Im} \sigma_n \geq 0$). Следует также отметить, что поверхность $\hat{\sigma}_n$ в зоне таких “крылышек” почти вертикальна, поэтому стационарные точки попадают на нее только при углах θ , близких к $\pi/2$, т.е. дают волны, распространяющиеся вблизи поверхности полупространства. Радиальная компонента вектора групповой скорости при этом по-прежнему направлена от источника.

Кроме собственных чисел $\hat{\sigma}_n$, входящих в фазовые функции (9), в уравнения (11) и матрицы Якоби S''_{nm} входят их производные $\hat{\sigma}'_n$ и $\hat{\sigma}''_n$ по параметрам β_1 и β_2 . Значения производных можно

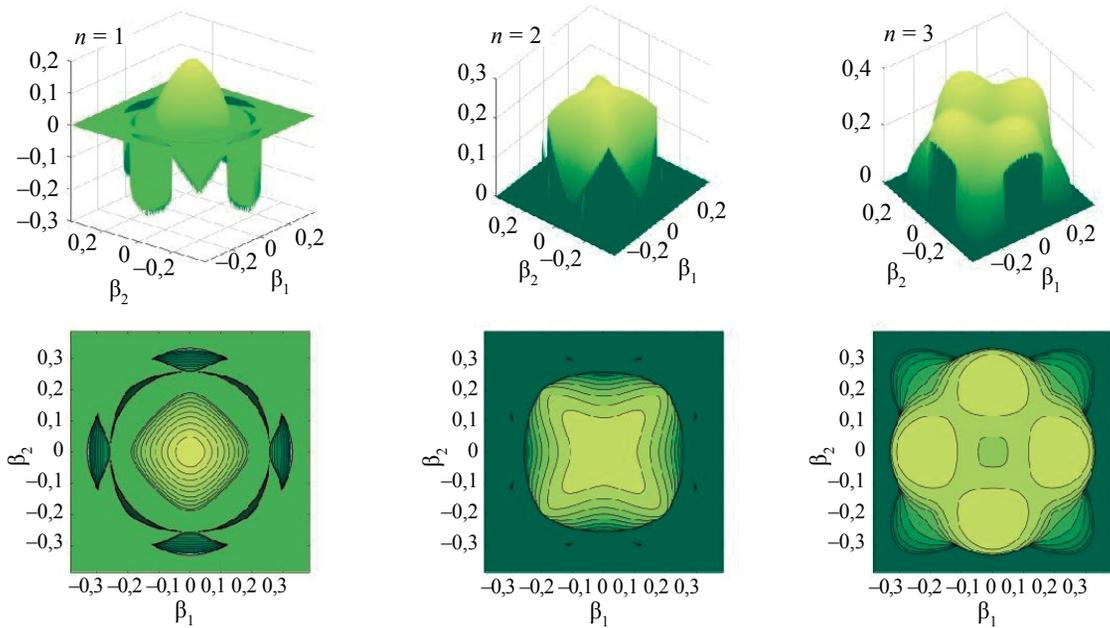


Рис. 4. То же, что на рис. 3, но для никелевого сплава NS с кубической анизотропией.

получить с помощью численного дифференцирования, однако более точный и устойчивый результат с существенно меньшими вычислительными затратами дает их явное представление через найденные σ_n и собственные векторы \mathbf{p}_n :

$$\hat{\sigma}'_n = (A' \mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n) / (\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n). \tag{13}$$

Здесь \mathbf{q}_n — собственный вектор сопряженной (транспонированной, комплексно-сопряженной) матрицы $(A^T)^*$: $[A^T - \sigma_n I]^* \mathbf{q}_n = 0$; звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения, элементы матрицы первых производных A' выписываются в явном виде. Представление (13) получается путем дифференцирования (12) и скалярного умножения результата на сопряженный собственный вектор \mathbf{q}_n . Аналогично выводится и представление для второй производной:

$$\sigma''_n = (A'' \mathbf{p}_n + 2A' \mathbf{p}'_n - \sigma'_n \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}_n) / (\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n). \tag{14}$$

Стационарные точки β_m совпадают с локальными минимумами целевых функций $g_n(\beta) = |\nabla S_n|^2$, в которых $g_n(\beta_m) = 0$. Их поиск можно проводить различными методами. В разработанном пакете AnisoBW они ищутся методом градиентного спуска, начиная с некоторого набора начальных точек, задаваемых узлами сетки, покрывающей область D_n . В случае выпуклой поверхности $\hat{\sigma}_n(\beta)$ (как, например, при положительных значениях $\hat{\sigma}_1$ на рис. 3, 4, $n = 1$) у функции $g_n(\beta)$ имеется единственная точка минимума, дающая искомую стационарную точку. Поэтому для ее надежного определения достаточно нескольких начальных значений. Но у невыпуклых $\hat{\sigma}_n$, таких как поверхности $n = 2$ и 3, имеется несколько локальных максимумов и минимумов, каждый из которых дает стационарную точку для направления строго вниз ($\theta = 0$). При увеличении θ они смещаются от начального положения, и при этом изменяется не только положение стационарных точек β_m в области D_n , но и их число M_n . Использование явных представлений (13)—(14) для производных $\hat{\sigma}'_n$ и $\hat{\sigma}''_n$, входящих в выражение для градиента целевых функций $\nabla g_n = 2S_n'' \nabla S_n$, делает неощутимыми затраты на его вычисление на каждом шаге минимизации.

В качестве иллюстрации на рис. 5 большими красными маркерами показано положение локальных экстремумов поверхностей $\hat{\sigma}_2$ и $\hat{\sigma}_3$ для никелевого сплава NS (рис. 4, $n = 2, 3$), а меньшими точками — изменение положения стационарных точек при варьировании θ от 0 до $0,45\pi$ при $\varphi = 0$. Красные пунктирные стрелки указывают направление их смещения от начального положения.

Хотя в этом примере поверхность $\hat{\sigma}_2$ ($n = 2$) имеет только один локальный максимум, расположенный в центре области D_2 , ее невыпуклость приводит к тому, что плоскость, наклоненная под углом $\theta > 0$, может касаться ее в трех точках. При $\varphi = 0$ их проекции на область D_2

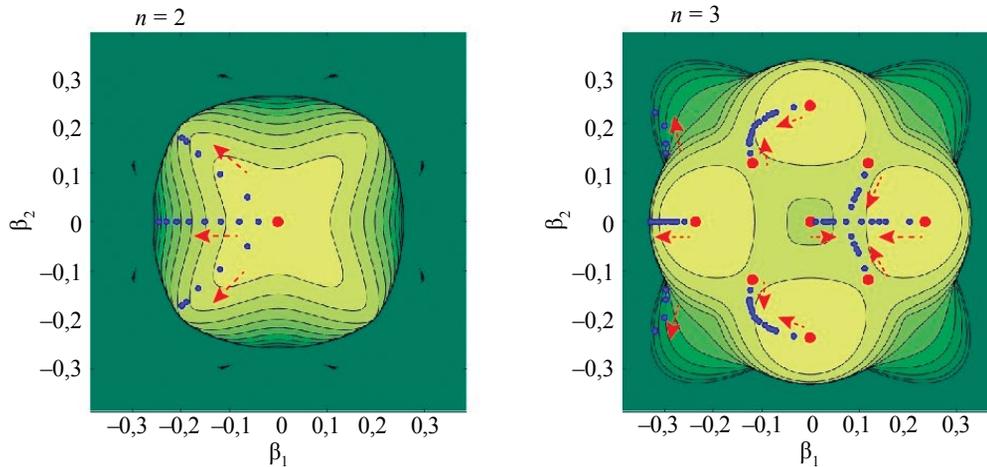


Рис. 5. Движение стационарных точек в областях D_2 и D_3 при изменении угла θ от 0 (крупные маркеры) до $0,45\pi$; $\varphi = 0$, материал NS.

с ростом θ движутся влево: две из них идут вдоль хребтов, крестообразно исходящих из центра под углами $\pm\pi/4$ и $\pm3\pi/4$, а одна — вдоль ложбины между ними (рис. 5, слева).

При $n = 3$ структура поверхности сложнее. Она имеет пять локальных максимумов и четыре минимума, от которых движутся стационарные точки при увеличении θ (рис. 5, справа). Причем $M_3 = 9$ только при $\theta < 0,14\pi$, а затем точки, стартовавшие из четырех правых экстремумов, сливаются в одну точку касания на склоне углубления, расположенного между ними, и число стационарных точек сокращается до шести. Затем она выходит на линию перегиба и пропадает. Аналогично сливаются и пропадают и две пары точек, стартовавших из верхних и нижних экстремумов, так что при $\theta = 0,2\pi$ остается только одна стационарная точка $\beta_1 = (-0,298, 0)$, движущаяся влево вдоль оси β_1 . Далее при $\theta = 0,35\pi$ число стационарных точек снова увеличивается до трех, а затем и до пяти, за счет касания крутых склонов поверхности $\hat{\sigma}_3$ у левой границы области D_3 . Данный пример показывает, что в зависимости от радиального направления число квазисферических волн, описываемых слагаемыми представления (10), может значительно меняться вплоть до десятка волновых фронтов в суммарном поле $\mathbf{u} = \sum_{n=1}^3 \mathbf{u}_n$.

Для верификации полученной асимптотики (10) проводилось сопоставление с результатами численного интегрирования исходных интегралов (8), показавшее их сходимость с ростом R (примеры такого сопоставления приведены в [24]). Однако возникает естественный вопрос: насколько такая сложная структура волнового поля с множеством волновых фронтов согласуется с результатами классического модального анализа для плоских волн.

СОПОСТАВЛЕНИЕ С ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПЛОСКИХ ВОЛН

На самом деле при $M_n > 1$ число различных квазисферических волн может быть меньше, чем M_n , так как некоторые слагаемые в (10) могут описывать волны, распространяющиеся с одинаковыми скоростями. Тем не менее у отдельной моды \mathbf{u}_n для некоторых направлений их может быть больше одной (рис. 6).

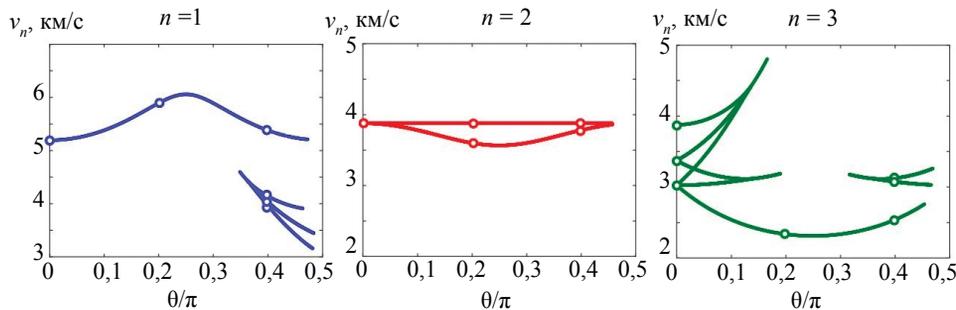


Рис. 6. Зависимость групповой скорости v_n квазисферических волн (10) от θ при $\varphi = 0$, материал NS; маркерами-кружочками показаны значения, нанесенные ниже на рис. 7г.

Видно, что у первой моды ($n = 1$) в широком диапазоне направлений $0 \leq \theta < 0,34\pi$ распространяется только одна квазипродольная волны. Но для направлений, близких к горизонтальным, появляются дополнительные стационарные точки, лежащие как раз в зоне «крылышек» (см. рис. 4), которые дают еще три более медленных волны (см. табл. 4). У второй моды ($n = 2$) во всем диапазоне направлений уже две волны, причем скорость одной из них не зависит от θ . А у третьей моды количество волн в диапазоне $0 < \theta < 0,1\pi$ достигает шести, хотя здесь $M_3 = 9$, т.е. стационарных точек еще больше. Характерным для этих кривых является наличие порождающих каустики особенностей типа «ласточкин хвост» [32].

Для сопоставления рассмотрим распространение плоских волн:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = A \mathbf{p} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}. \quad (15)$$

Здесь $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ — волновой вектор; $k = |\mathbf{k}|$ — волновое число; \mathbf{n} — единичная нормаль к фронту волны; \mathbf{p} — единичный вектор, описывающий поляризацию колебаний; A — амплитудный множитель. Подстановка представления (15) в исходную систему уравнений (1) и вынесение частоты приводит к задаче на собственные значения, похожей на задачу (6):

$$[\mathbf{B} - \rho c^2 \mathbf{I}] \mathbf{p} = 0, \quad (16)$$

но с матрицей \mathbf{B} , зависящей не от параметров преобразования Фурье α_j , а от компонент нормали $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$: $b_{ij} = C_{ijk} n_k n_l$. Для каждого \mathbf{n} характеристическое уравнение Кристоффеля имеет три положительных корня c_n , которые вместе с волновыми числами $k_n = \omega/c_n$ и соответствующими собственными векторами \mathbf{p}_n определяют три плоских волны \mathbf{u}_n вида (15), распространяющихся с фазовыми скоростями $c_1 > c_2 \geq c_3$ и произвольной амплитудой A .

В изотропном случае значения c_n не зависят от ориентации фронта, задаваемой нормалью \mathbf{n} . Направление вектора групповой скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ совпадает с направлением волнового вектора \mathbf{k} , а групповая скорость $v = |\mathbf{v}|$ — с фазовой скоростью c : $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, $\mathbf{v} = c\mathbf{n}$. В анизотропном случае фазовые скорости зависят от ориентации волнового фронта: $c_n = c_n(\mathbf{n})$, а вектор групповой скорости к тому же может отклоняться от волнового вектора \mathbf{k} . Используя технику, предложенную Л.Г. Меркуловым [9, 10], для компонент \mathbf{v} получено компактное представление [1]:

$$v_j = C_{ijkl} p_i p_k n_l / (c\rho). \quad (18)$$

Аналогично углам φ и θ , задающим направление \mathbf{n} , направление вектора \mathbf{v} описывается сферическими углами φ_v и θ_v , которые в случае плоских волн могут отличаться от φ и θ , а для квазисферических волн (10) они совпадают с углами радиального направления: $\varphi_v = \varphi$, $\theta_v = \theta$.

На рис. 7 показаны примеры угловых зависимостей скоростей c_n , v_n и направляющих углов θ_v плоских волн для материала NS при $\varphi = 0$. Видно, что фазовая и групповая скорости второй волны, в отличие от первой и третьей, в рассматриваемой плоскости $\varphi = 0$ не зависят от θ и равны между собой ($c_2 = v_2 = 3,876$ км/с); соответственно у нее $\theta_v = \theta$ (рис. 7б). У первой и третьей плоской волны направляющий угол вектора групповой скорости θ_v отличается от θ , причем у третьей моды он выходит за пределы диапазона $-0,5 < \theta_v/\pi < 0,5$, задающего направление вглубь нижнего полупространства. Это означает, что при $|\theta| > 0,3\pi$ пакет плоских волн с такой ориентацией фронта переносит энергию вверх, к границе полупространства $z = 0$.

Для сопоставления с характеристиками квазисферических волн (см. рис. 6), групповые скорости плоских волн показаны на рис. 7г как функции от своего направляющего угла θ_v . Маркерами на них нанесены значения v_{nm} , взятые с рис. 6. При одинаковом направлении векторов значения групповой скорости должны совпадать. Действительно, для выбранных в качестве примера направлений $\theta_v = 0, 0,2\pi$ и $0,4\pi$ маркеры-кружочки легли на каждую из кривых, но как уже отмечалось, имеется и несколько «лишних» значений. Очевидно, для их получения необходимо отклонить нормаль \mathbf{n} от плоскости (x, z) , так как на рис. 7г уже есть все возможные значения для $\varphi = 0$. Используя свойство взаимности векторов \mathbf{k} и \mathbf{v} (у плоских волн \mathbf{v} ортогонален к поверхности, вычерчиваемой вектором $\mathbf{k}(\varphi, \theta)$, и наоборот), для каждого из значений, отмеченных маркерами на рис. 6 и 7г, были получены направляющие углы (φ_m, θ_m) нормалей \mathbf{n} к фронту плоских волн, у которых векторы групповой скорости (18) совпадают по величине v_m и направлению $(0, \theta_v)$ с аналогичными характеристиками квазисферических волн (см. табл. 2—4).

Тем самым подтверждается согласованность волновых характеристик полученного асимптотического представления (10) и классического модального представления (15). Однако в отличие от последнего, представление (10) получено с учетом источника и поэтому дает значе-

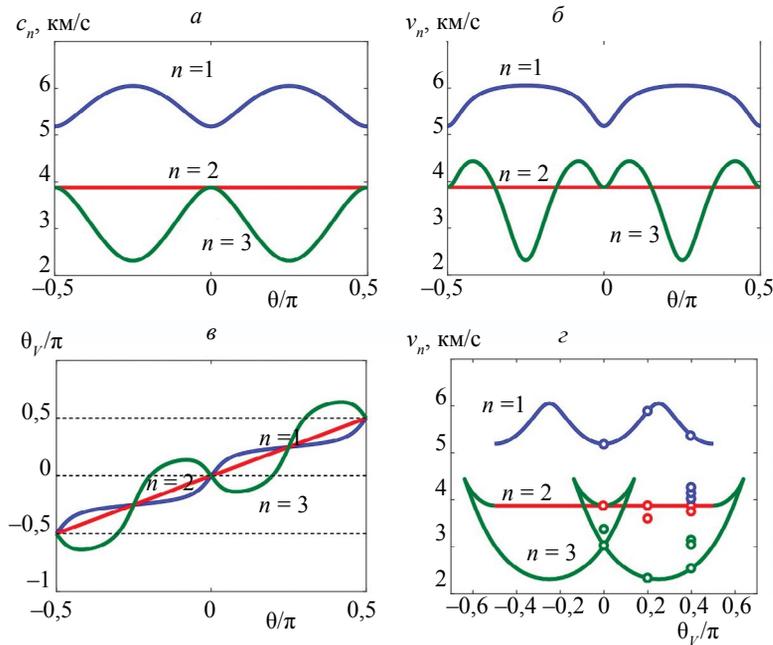


Рис. 7. Зависимость фазовой скорости c_n (а), групповой скорости v_n (б) и направляющего угла θ_v вектора групповой скорости плоских волн от угла ориентации фронта θ при $\varphi = 0$ (в); групповые скорости v_n в зависимости от θ_v (г); маркерами-кружочками показаны взятые с рис. 6 групповые скорости квазисферических волн (10) для трех направлений $\theta/\pi = 0, 0,2$ и $0,4$, $\varphi = 0$; материал NS.

Таблица 2

Направляющие углы (φ_m, θ_m) фронта плоских волн, дающих такие же векторы групповой скорости, что и у квазисферических волн в направлении $\varphi = 0, \theta = 0$

Номер n	Стационарные точки $\beta_m = (\beta_{m,1}, \beta_{m,2})$		Скорость v_{nm} , км/с	Ориентация фронта:	
	φ_m/π	θ_m/π		φ_m/π	θ_m/π
1	0,000	0,000	5,191	0,000	0,000
2	0,000	0,000	3,876	0,000	0,000
3	0,000	0,000	3,371	0,000	0,000
	0,119	0,119		0,250	-0,164
	-0,119	0,119		-0,250	0,164
	-0,119	-0,119		0,250	0,164
	0,119	-0,119	3,023	-0,250	-0,164
	0,236	0,000		0,000	-0,197
	0,000	0,236		-0,500	0,197
	-0,236	0,000		0,000	0,197
0,000	-0,236	0,500	0,197		

Таблица 3

То же, что в табл. 2, но для направления $\theta/\pi = 0,2$

Номер n	Стационарные точки $\beta_m = (\beta_{m,1}, \beta_{m,2})$		Скорость v_{nm} , км/с	Ориентация фронта:	
	φ_m/π	θ_m/π		φ_m/π	θ_m/π
1	-0,059	0,000	5,888	0,000	0,109
2	-0,152	0,000	3,876	0,000	0,200
	-0,189	-0,163	3,598	0,226	0,281
	-0,189	0,163		-0,226	0,281
3	-0,298	0,000	2,339	0,000	0,242

Таблица 4

То же, что в табл. 2 и 3, но для направления $\theta/\pi = 0,4$

Номер n	Стационарные точки $\beta_m = (\beta_{m,1}, \beta_{m,2})$		Скорость v_{nm} , км/с	Ориентация фронта:	
	$\beta_{m,1}$	$\beta_{m,2}$		φ_m/π	θ_m/π
1	-0,190	0,000	5,377	0,000	0,469
	-0,263	0,000	4,140	0,000	0,533
	-0,293	-0,064	4,033	0,069	0,601
	-0,293	0,064		-0,069	0,601
	-0,316	0,000	3,960	0,000	0,646
2	-0,245	0,000	3,876	0,000	0,400
	-0,240	-0,097	3,779	0,123	0,363
	-0,240	0,097		-0,123	0,363
3	-0,296	-0,160	3,124	0,158	0,387
	-0,296	0,160		-0,158	0,387
	-0,320	-0,223	3,073	0,194	0,444
	-0,320	0,223		-0,194	0,444
	-0,325	0,000	2,537	0,000	0,277

ния амплитуды каждой из возбуждаемых квазисферических волн. Это позволяет использовать его для построения диаграмм направленности объемных волн и анализа влияния на них характеристик источника и анизотропии материала.

ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ

В качестве примера на рис. 8 приведены диаграммы направленности, т.е. зависимости модулей амплитудных факторов $|a_{nm}|$ от θ при $\varphi = 0$ для тех же волн, что и на рис. 6, при возбуждении сосредоточенной вертикальной (рис. 8а—б) или касательной (рис. 8г—е) нагрузками: $\mathbf{q} = (0, 0, \delta)$ или $\mathbf{q} = (\delta, 0, 0)$. В отличие от изотропного случая при вертикальной нагрузке максимум амплитуды квазипродольных волн наблюдается не в направлении строго вниз ($\theta = 0$), а при $\theta \approx 0,25\pi$ (рис. 8а). Примерно там же расположен и максимум главного лепестка при касательной нагрузке (рис. 8г). Кроме того, за счет дополнительных стационарных точек,

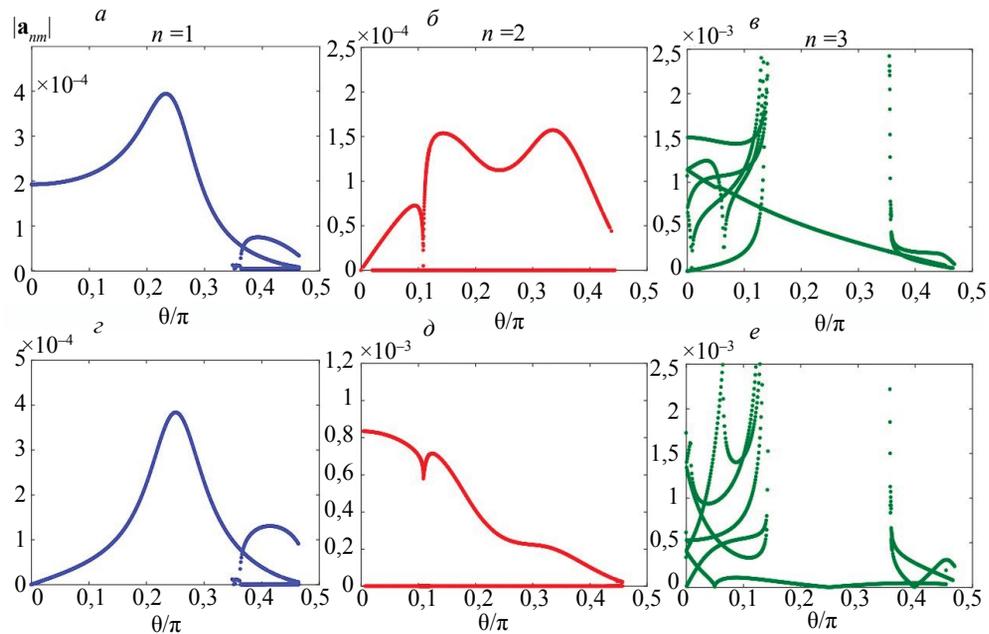


Рис. 8. Диаграммы направленности (зависимости $|a_{nm}|$ от θ при $\varphi = 0$) для квазисферических волн, возбуждаемых вертикальной (вверху, а—б) и касательной (внизу, г—е) сосредоточенными нагрузками.

лежащих в области «крылышек», при $\theta > 0,35\lambda$ появляются дополнительные волновые фронты. В этом диапазоне амплитуда одного из них даже больше, чем у основной, самой быстрой волны, распространяющейся при всех θ со скоростью $v_{11} > 5$ км/с (см. рис. 6, $n = 1$).

Из двух квазипоперечных волн второй моды (см. рис. 6, $n = 2$) амплитуда волн, распространяющихся с постоянной скоростью $v_{21} = 3,876$ км/с, оказалась равной нулю (рис. 8б, д). Фактически, как и в изотропном случае, с корнем σ_2 здесь связана только одна волна. Но зато у третьей моды, как уже отмечалось выше, их число может достигать шести (см. рис. 6, $n = 3$). Причем при касательном возбуждении амплитуда почти у всех из них больше, чем у основной волны, которая возбуждается во всем диапазоне $0 \leq \theta < \pi/2$ и распространяется с самой маленькой скоростью $2,31 < v_{31} < 3,02$ км/с (см. рис. 8д). Резкий рост амплитуды этих дополнительных волн на краях диапазонов их возбуждения указывает на каустики, очевидно, связанные с особенностями в вершинах «ласточкиных хвостов».

Отметим, что в работе [18] (рис. 8 и 9) такие дополнительные фронты и каустики отсутствуют. Возможно из-за того, что для формирующей их суперпозиции были взяты только волны с нормалью \mathbf{n} , лежащей в рассматриваемой плоскости, в то время как численные примеры (маркеры на рис. 7г и табл. 2—4) показывают, что вклад дают и волны с нормалью, не лежащей в этой плоскости.

Работа выполняется в рамках проекта РФФ № 24-11-00140.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lane C. Wave Propagation in Anisotropic Media / In: The Development of a 2D Ultrasonic Array Inspection for Single Crystal Turbine Blades. Springer Theses. Cham: Springer. 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02517-9_2
2. Пьянков В.А., Пьянков И.И. Акустические методы контроля лопаток газотурбинных двигателей // В мире неразрушающего контроля. 2019. Т. 22. № 1(83). С. 36–44. https://doi.org/10.12737/article_5ca31f9ac25011.96368656
3. Morokov E., Titov S., Levin V. In situ high-resolution ultrasonic visualization of damage evolution in the volume of quasiisotropic CFRP laminates under tension // Composites Part B Engineering. 2022. V. 247. P. 110360. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2022.110360>
4. Levin V., Petronyuk Y., Artyukov I., Bukreeva I., Malykhin A., Longo E., D'Amico L., Giannoukos K., Tromba G. Three-Dimensional Study of Polymer Composite Destruction in the Early Stages // Polymers. 2023. V. 15. P. 276. <https://doi.org/10.3390/polym15020276>
5. Базулин Е.Г. Учет неоднородной анизотропии сварного соединения при восстановлении изображения отражателей по эхосигналам, измеренным ультразвуковой антенной решеткой // Дефектоскопия. 2017. № 1. С. 11—25. <https://doi.org/10.1134/S1061830917010028>
6. Kalkowski M.K., Lowe M.J.S., Samaitis V., Schreyer F., Robert S. Weld map tomography for determining local grain orientations from ultrasound // Proc. R. Soc. A. 2023. V. 479. P. 20230236. <https://doi.org/10.1098/rspa.2023.0236>
7. Musgrave M.J.P. The propagation of elastic waves in crystals and other anisotropic media // Reports. Prog. in Phys. 1959. V. 22. P. 74—96. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/22/1/303>
8. Buchwald V.T. Elastic Waves in Anisotropic Media // Proc. Royal Soc. London. Series A, Math. and Phys. Sciences. 1959. V. 253. No. 1275. P. 563—580. <http://www.jstor.org/stable/100706> Accessed 23 March 2024.
9. Меркулов Л.Г., Яковлев Л.А. Особенности распространения и отражения ультразвуковых лучей в кристаллах // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 1. С. 99—106. http://www.akzh.ru/pdf/1962_1_99-106.pdf
10. Merkulov L.G. Ultrasonic waves in crystals // Appl. Mater. Res. 1963. V. 2. P. 231—240.
11. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 388 с.
12. Auld B.A. Acoustic fields and waves in solids. New York: Wiley, 1973. 423 p.
13. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 280 с. <https://www.libex.ru/detail/book111023.html>
14. Chadwick P. Wave propagation in transversely isotropic elastic media. I. Homogeneous plane waves // Proc. Roy. Soc. Lond. 1989. V. 422. P. 23—66. <https://www.jstor.org/stable/2398523>
15. Alshits V.I., Lothe J. Some basic properties of bulk elastic waves in anisotropic media // Wave Motion. 2004. V. 40. P. 297—313. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2004.02.004>
16. Бабич В.М., Киселев А.П. Упругие волны. Высокочастотная теория. СПб.: БХВ-Петербург, 2014. 320 с.
17. Wu K., Nagy P.B., Adler L. Far field radiation of a point source on the free surface of semi-infinite anisotropic solids / In: Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation. Eds. D.O. Thompson, D.E. Chimenti. N.Y.: Plenum Press, 1990. V. 9. P. 149—156.
18. Wu K., Nagy P.B., Adler L. Far-field radiation of a vibrating point source in anisotropic media // J. Nondestruct. Eval. 1991. V. 10. P. 71—78. <https://doi.org/10.1007/BF00568102>
19. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

20. Бабешико В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Анализ волновых полей, возбуждаемых в упругом стратифицированном полупространстве поверхностными источниками // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 3. С. 366—371. http://www.akzh.ru/pdf/1986_3_366-371.pdf
21. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Кривонос А.С. Возбуждение и распространение упругих волн в многослойных анизотропных композитах // Прикл. математика и механика. 2010. Т. 74. № 3. С. 419—432.
22. Glushkov E., Glushkova N., Eremin A. Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 129 (5). P. 2923—2934. <http://dx.doi.org/10.1121/1.3559699>
23. Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Упругие волны в анизотропных материалах / Сборник трудов XXXV Сессии Российского Акустического Общества. М.: Издательство ГЕОС, 2023. С. 942—946. <https://doi.org/10.34756/GEOS.2023.17.38421>
24. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Kiselev O.N. Body wave asymptotics for an anisotropic elastic half-space with a surface source / 2023 Days on Diffraction (DD). St.Petersburg. Russian Federation. 2023. P. 78—82. <https://doi.org/10.1109/DD58728.2023.10325771>
25. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Татаркин А.А., Ермоленко О.А. Моделирование отраженного ультразвукового поля в составных образцах // Дефектоскопия. 2024. № 11. С. 3—14. <https://doi.org/10.31857/S0130308224110014>
26. Свешиников А.Г. Принцип предельного поглощения для волновода // Докл. АН СССР. 1951. Т. 80. № 3. С. 345—347.
27. Глушков Е.В., Сыромятников П.В. Анализ волновых полей, возбуждаемых поверхностным гармоническим источником в анизотропном полупространстве. Краснодар, 1985. 11 с. Рукопись представлена Кубанским госуниверситетом. Деп. в ВИНТИ 07.08.85. № 5861-85.
28. Tolstoy I., Usdin E. Wave propagation in elastic plates: low and high mode dispersion // J. Acoust. Soc. Am. 1957. V. 29. P. 37—42. <https://doi.org/10.1121/1.1908675>
29. Бурлий П.В., Кучеров И.Я. Обратные упругие волны в пластинах // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26. № 9. С. 644—647. <https://journals.ioffe.ru/issues/722>
30. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
31. Wang L., Yuan F.G. Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modeling and experiments // Compos. Sci. Technol. 2007. V. 67 (8). P. 1370—1384. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2006.09.023>
32. Пресляк М.Ю. Исследование особенностей и расчет сечений волновой поверхности в анизотропной упругой среде // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 2. С. 291—295. http://www.akzh.ru/pdf/1981_2_291-295.pdf

REFERENCES

1. Lane C. Wave Propagation in Anisotropic Media / In: The Development of a 2D Ultrasonic Array Inspection for Single Crystal Turbine Blades. Springer Theses. Cham: Springer. 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02517-9_2
2. Pyankov V.A., Pyankov I.N. Acoustic methods of control of blades of gas turbine engines // V Mire NK. 2019. V. 22. No. 1 (83). P. 36—44 (in Russian).
3. Morokov E., Titov S., Levin V. In situ high-resolution ultrasonic visualization of damage evolution in the volume of quasiisotropic CFRP laminates under tension // Composites Part B Engineering. 2022. V. 247. P. 110360. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2022.110360>
4. Levin V., Petronyuk Y., Artyukov I., Bukreeva I., Malykhin A., Longo E., D'Amico L., Giannoukos K., Tromba G. Three-Dimensional Study of Polymer Composite Destruction in the Early Stages // Polymers. 2023. V. 15. P. 276. <https://doi.org/10.3390/polym15020276>
5. Bazulin E.G. Allowing for inhomogeneous anisotropy of a welded joint when reconstructing reflector images from echo signals received by an ultrasonic antenna array // Defektoskopiya. 2017. No. 1. P. 11—25. <https://doi.org/10.1134/S1061830917010028>
6. Kalkowski M.K., Lowe M.J.S., Samaitis V., Schreyer F., Robert S. Weld map tomography for determining local grain orientations from ultrasound // Proc. R. Soc. A. 2023. V. 479. P. 20230236. <https://doi.org/10.1098/rspa.2023.0236>
7. Musgrave M.J.P. The propagation of elastic waves in crystals and other anisotropic media // Reports. Prog. in Phys. 1959. V. 22. P. 74—96. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/22/1/303>
8. Buchwald V.T. Elastic Waves in Anisotropic Media // Proc. Royal Soc. London. Series A, Math. and Phys. Sciences. 1959. V. 253. No. 1275. P. 563—580. <http://www.jstor.org/stable/100706> Accessed 23 March 2024.
9. Merkulov L.G., Yakovlev L.A. Some features of propagation and reflection of ultrasound in monocrystals // Sov. Phys. Acoust. (USA). 1962. V. 8. No. 1. P. 99—106. http://www.akzh.ru/pdf/1962_1_99-106.pdf
10. Merkulov L.G. Ultrasonic waves in crystals // Appl. Mater. Res. 1963. V. 2. P. 231—240.
11. Fedorov F.I. Theory of elastic waves in crystals. Moscow: Nauka, 1965. 388 p. (in Russian).
12. Auld B.A. Acoustic fields and waves in solids. New York: Wiley, 1973. 423 p.

13. *Petrashen G.I.* Wave propagation in anisotropic elastic media. Leningrad: Nauka, 1980, 280 p. (In Russian). <https://www.libex.ru/detail/book111023.html>
14. *Chadwick P.* Wave propagation in transversely isotropic elastic media. I. Homogeneous plane waves // Proc. Roy. Soc. Lond. 1989. V. 422. P. 23—66. <https://www.jstor.org/stable/2398523>
15. *Alshits V.I., Lothe J.* Some basic properties of bulk elastic waves in anisotropic media // Wave Motion. 2004. V. 40. P. 297—313. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2004.02.004>
16. *Babich V.M., Kiselev A.P.* Elastic waves. High-frequency theory. St. Petersburg: BHV-Peterburg, 2014. 320 p. (in Russian).
17. *Wu K., Nagy P.B., Adler L.* Far field radiation of a point source on the free surface of semi-infinite anisotropic solids / In: Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation. Eds. D.O. Thompson, D.E. Chimenti. N.Y.: Plenum Press, 1990. V. 9. P. 149—156.
18. *Wu K., Nagy P.B., Adler L.* Far-field radiation of a vibrating point source in anisotropic media // J. Nondestruct. Eval. 1991. V. 10. P. 71—78. <https://doi.org/10.1007/BF00568102>
19. *Vorovich I.I., Babeshko V.A.* Dynamic mixed problems of elasticity for non-classical domains. Moscow: Nauka, 1979. 320 p. (In Russian).
20. *Babeshko V.A., Glushkov E.V., Glushkova N.V.* Analysis of wave fields generated in a stratified elastic half-space by surface sources // Sov. Phys. Acoust. (USA). 1986. V. 32. No. 3. P. 223—226. http://www.akzh.ru/pdf/1986_3_366-371.pdf
21. *Glushkov Ye.V., Glushkova N.V., Krivonos A.S.* The excitation and propagation of elastic waves in multilayered anisotropic composites // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2010. V. 74. P. 297—305.
22. *Glushkov E., Glushkova N., Eremin A.* Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 129 (5). P. 2923—2934. <http://dx.doi.org/10.1121/1.3559699>
23. *Glushkov E.V., Glushkova N.V.* Elastic waves in anisotropic materials / Proceedings of the XXXV Session of the Russian Acoustic Society. Moscow: GEOS Publisher, 2023. P. 942—946 (in Russian). <https://doi.org/10.34756/GEOS.2023.17.38421>
24. *Glushkov E.V., Glushkova N.V., Kiselev O.N.* Body wave asymptotics for an anisotropic elastic half-space with a surface source / 2023 Days on Diffraction (DD). St.Petersburg. Russian Federation. 2023. P. 78—82. <https://doi.org/10.1109/DD58728.2023.10325771>
25. *Glushkov E.V., Glushkova N.V., Tatarkin A.A., Ermolenko O.A.* Modeling of reflected ultrasonic fields in composed samples // Defektoskopiya. 2024. No. 11. P. 3—14. <https://doi.org/10.31857/S0130308224110014>
26. *Sveshnikov A.G.* The principle of limiting absorption for a waveguide // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1951. V. 80. No. 3. P. 345—347 (in Russian).
27. *Glushkov E.V., Syromyatnikov P.V.* Analysis of wave fields excited by a surface harmonic source in an anisotropic half-space, Manuscript submitted by Kuban State University, Dep. in VINITI 07.08.85. No. 5861-85, Krasnodar, 1985. 11 p. (In Russian).
28. *Tolstoy I., Usdin E.* Wave propagation in elastic plates: low and high mode dispersion // J. Acoust. Soc. Am. 1957. V. 29. P. 37—42. <https://doi.org/10.1121/1.1908675>
29. *Burlii P.V., Kucherov I.Ya.* Inverse elastic waves in plates // Letters in ZhETF. 1977. V. 26. No. 9. P. 644—647 (in Russian). <https://journals.ioffe.ru/issues/722>
30. *Fedoryuk M.V.* Metod perevala (The Saddle-Point Method). Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).
31. *Wang L., Yuan F.G.* Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modeling and experiments // Compos. Sci. Technol. 2007. V. 67 (8). P. 1370—1384. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2006.09.023>
32. *Preslyak M.Yu.* Investigation of features and calculation of wave surface cross sections in anisotropic elastic medium // Akust. Zhurn. 1981. V. 27. No. 2. P. 291—295. (In Russian). http://www.akzh.ru/pdf/1981_2_291-295.pdf