

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА МАГНИТОСТАТИКИ ДЛЯ ОДНОРОДНО НАМАГНИЧЕННЫХ ТЕЛ В РАМКАХ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ

© 2025 г. В.В. Дякин<sup>1</sup>, О.В. Кудряшова<sup>1,\*</sup>, В.Я. Раевский<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup>Институт физики металлов имени М.Н. Михеева УрО РАН,  
Россия 620108 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 18  
E-mail: \*kudryashova\_ov@imp.uran.ru; \*\*raevskii@imp.uran.ru

Поступила в редакцию 09.01.2025; после доработки 28.01.2025  
Принята к публикации 31.01.2025

Для однородно намагниченных тел в рамках обратной задачи магнитостатики в двумерном случае получено нелинейное одномерное интегродифференциальное уравнение на функцию одного переменного, которая определяет форму магнетика или полости в нем по измеренной напряженности результирующего поля вне тела. Предложен алгоритм численного решения этого уравнения, сводящийся к минимизации функции нескольких переменных. Составлена программа на языке ФОРТРАН, реализующая указанный алгоритм. В качестве тестового и иллюстративного примера по известной напряженности результирующего поля вне магнетика найдено сечение однородного бесконечного цилиндра, находящегося в немагнитной и непрозрачной среде.

*Ключевые слова:* основное уравнение магнитостатики, обратная задача, однородная намагниченность, магнитный неразрушающий контроль.

## THE 2D MAGNETOSTATICS INVERSE PROBLEM FOR HOMOGENEOUSLY MAGNETIZED BODY

© 2025 V.V. Dyakin<sup>1</sup>, O.V. Kudryashova<sup>1,\*</sup>, V.Y. Raevskii<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup>M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Russia  
620108 Yekaterinburg  
E-mail: \*kudryashova\_ov@imp.uran.ru; \*\*raevskii@imp.uran.ru

We consider 2D magnetostatics inverse problem for uniformly magnetized body and reduce it to a nonlinear 1D integrodifferential equation determining body(cavity) shape based on the measured strength of the external magnetic field. We design an numerical algorithm for solution of this equation based on minimization of a function of several variables and develop a FORTRAN program implementing this algorithm. To test and illustrate our approach we find a solution for the cross-section of a homogeneous infinite cylinder in a non-magnetic and opaque medium based on the known strength of the external field.

*Keywords:* magnetostatics basic equation, inverse problem, homogeneous magnetization, magnetic non-destructive testing.

DOI: 10.31857/S0130308225020049

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Прямая задача магнитостатики заключается в нахождении напряженности результирующего магнитного поля внутри и вне магнетика произвольной формы при заданных геометрических и физических параметрах исследуемой конфигурации — форме и размерах магнетика, его магнитной проницаемости, величине и направлении внешнего поля. Однако для задач неразрушающего магнитного контроля наибольший интерес представляют обратные задачи магнитостатики — по заданному внешнему полю и известному (измеренному) результирующему полю в некоторой доступной для измерения конечной области вне магнетика восстановить «исходные данные» — геометрические (форма магнетика, форма и размеры дефектов и полостей) и/или физические (магнитная проницаемость) характеристики магнетика.

При решении обратной задачи магнитостатики возникают две серьезные проблемы. Первая из них заключается в частой (и достаточно типичной для обратных задач вообще) неединственности ее решения, когда конфигурации с различными наборами геометрических и/или физических параметров магнетиков приводят к одному и тому же результирующему полю в области его возможного измерения, что является причиной принципиальной невозможности однозначного определения указанных параметров. Эти вопросы достаточно подробно обсуждены, например, в работах [1—6]. Вторая проблема состоит в необычайной сложности (математического характера) прямого непосредственного решения обратной задачи в ее общей постановке. Различные подходы к практическому решению этой задачи обсуждены, например, в работах [7—13]. Большинство из них основываются на многократном

решении прямых задач (либо оригинальными численно-аналитическими методами с контролируемой точностью, либо с использованием универсальных программных пакетов типа ANSYS, ELCUT, FEMM) для различных (но априори фиксированных!) геометрических форм магнетика и форм возможных дефектов в них (шары, полупространства, эллипсоиды, цилиндры, плоскопараллельные пластины и др.) с целью выявления закономерностей поведения результирующих магнитных полей в зависимости от местоположения магнетика и дефектов в нем, а также от их размерных и ориентационных геометрических параметров. Другие подходы используют либо метод минимизации функционала отклонения измеренного распределения магнитного поля от рассчитанных (опять же описанным выше многократным решением прямой задачи) полей «эталонного» дефекта, либо построение интерполяционных формул (на основе решения прямых задач или данных натурального эксперимента), выражающих зависимость результирующего поля от тех или иных параметров дефектов.

Возникали и попытки решения обратной задачи по определению дефектной области без априорного предположения о принадлежности этой области какой-либо конкретной геометрической форме. Нам известна работа [14] (и некоторые дальнейшие работы этих авторов с той же идеологией), в которой в двумерной модели предложена методика определения формы и размеров поверхностных дефектов на одной из поверхностей бесконечной пластины конечной толщины по измеренным значениям напряженности результирующего магнитного поля со стороны бездефектной поверхности пластины. Алгоритм основан на вполне разумном и обоснованном предположении, что в магнитомягких ферромагнетиках с большой магнитной проницаемостью силовая линия, построенная вблизи поверхности ферромагнетик — воздух, с достаточной точностью описывает форму и размеры некоторых видов поверхностных дефектов, а потому задача сводится к построению внутри указанной пластины силовых линий напряженности поля по измеренной напряженности результирующего поля с бездефектной стороны пластины. К предложенной в этой работе схеме определения таких линий внутри пластины есть как вопросы принципиального характера к самой методике расчета, так и к корректности ее численной реализации, однако авторы утверждают о неплохом соответствии результатов расчета с экспериментом. В нашей работе [15] исследуется обратная трехмерная задача магнитостатики для однородно намагниченного магнетика с известной намагниченностью. Такого рода намагниченность приводит к упрощению общей математической модели, что позволило доказать как единственность решения обратной задачи для таких магнетиков, так и указать подход к ее непосредственному решению без априорного предположения о типе геометрической формы магнетика (в случае его нахождения в непрозрачной и немагнитной среде) или формы возможного внутреннего дефекта в нем в виде полости. В этой работе в качестве основного результата получено двумерное существенно нелинейное интегродифференциальное уравнение на функцию двух переменных, график которой совпадает либо с поверхностью самого магнетика, либо с поверхностью полости внутри него. Однако перспектива численного решения такого уравнения казалась весьма проблемной из-за существенной нелинейности самого уравнения. Любая вычислительная реализация решения такого уравнения сводится к численному решению алгебраической системы нелинейных уравнений с достаточно большим числом неизвестных (в частности, из-за того, что искомая функция зависит от двух переменных) либо относительно узлов двумерной квадратурной формулы, которой заменяются двойные интегралы, либо коэффициентов разложения искомой функции двух переменных по какому-либо базису. В другом варианте численной реализации это приводит к минимизации сложной функции от большого числа переменных того же смысла. Все методы приближенного решения такой задачи являются итерационными, а при большом числе переменных результат, как правило, существенно зависит от выбранного начального приближения из-за обычно большого числа локальных минимумов, что значительно затрудняет поиск требуемого глобального минимума. В настоящей работе выводится и исследуется аналогичный алгоритм решения обратной задачи магнитостатики для однородно намагниченных тел с известной намагниченностью, но в двумерном случае. Этот алгоритм приводит к решению уже одномерного нелинейного интегродифференциального уравнения на функцию уже одного переменного, график которой совпадает либо с сечением поверхности самого магнетика, либо с сечением поверхности полости внутри него. Это значительно улучшает перспективу численной реализации решения полученного функционального уравнения.

Существуют различные способы создания однородной (т.е. постоянной внутри тела) намагниченности в магнетиках, что необходимо для применения предлагаемого в настоящей работе алгоритма. Как известно [16], постоянная намагниченность возникает в однородном магнетике в форме произвольного эллипсоида (и его предельных форм), если магнетик погружен в постоянное магнитное поле любой интенсивности. Методы создания однородной намагниченности в телах других форм специальным подбором неоднородных внешних полей обсуждается в [17].

Однородная намагниченность может быть реализована и в постоянных магнитах. В ферромагнетике однородная намагниченность может быть создана постоянным внешним полем, величина которого такова, что тело находится в состоянии насыщения. В этом случае его намагниченность тоже постоянна по всему объему тела и определяется только материалом его изготовления (а потому считается известной).

## 2. ДВУМЕРНАЯ МАГНИТОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для решения прямых и обратных задач магнитостатики мы в общем случае исходим из ее основного трехмерного интегродифференциального уравнения

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) - \nabla \operatorname{div} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 \setminus S, \quad (1)$$

которое эквивалентно исходной системе уравнений Максвелла для случая магнитостатики (см. [18, с. 16, 17], [19—24]). В уравнении (1) введены следующие обозначения:  $\Omega$  — пространственная область с граничной поверхностью  $S$ , занятая магнетиком;  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$  — напряженность приложенного внешнего поля;  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  — напряженность результирующего поля;  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  — возникающая в магнетике намагниченность. При использовании связи  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = (\mu - 1)\mathbf{H}(\mathbf{r})$  ( $\mu$  — магнитная проницаемость) интегродифференциальное уравнение (1) становится уравнением для расчета напряженности  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  результирующего магнитного поля внутри и вне магнетика, помещенного в поле внешних источников. Геометрическая обратная задача для уравнения (1) ставится в следующей формулировке: по известной напряженности внешнего поля  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$  и известной (измеренной) напряженности результирующего поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  в некоторой доступной для измерения конечной области  $G$  (вне  $\Omega$ ) восстановить форму области магнетика  $\Omega$  (что включает форму и локализацию возможных дефектов в нем).

Более простая для исследования двумерная модель магнитостатики применима в том случае, когда имеет место независимость всех геометрических и физических параметров магнетика, а также и внешнего поля, от одной из пространственных переменных (например,  $z$ ). Таким образом моделируют протяженные однородные магнетики при условии, что измерения производятся вдали от краев [22, с. 201]. В этой модели область магнетика суть декартово произведение  $\Omega = \Omega_2 \times (-\infty < z < +\infty)$ , где  $\Omega_2 \subset \mathfrak{R}^2$  — сечение  $\Omega$  плоскостью  $z = 0$  (см. рис. 1), а физические характеристики магнетика и внешнего поля не зависят от  $z$ , т.е. для  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ :

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \{M_x(x, y), M_y(x, y), M_z(x, y)\}, \quad \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0(x, y), H_y^0(x, y), H_z^0(x, y)\}. \quad (2)$$

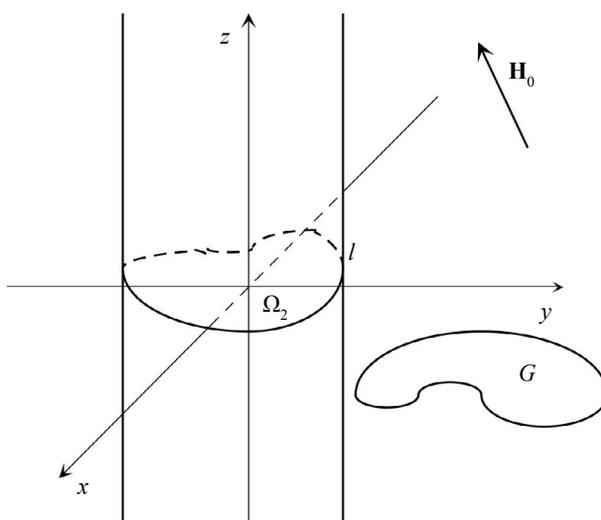


Рис. 1. Магнетик, двумерная модель.

При таких условиях из уравнения (1) выводится (см. [22, с. 201]) следующее уравнение:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2\pi} \nabla \int_{\Omega_2} \frac{(x-x')M_x(x',y') + (y-y')M_y(x',y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dx'dy' = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = (x, y, z). \quad (3)$$

Из этого уравнения с учетом (2) сразу следует (так как интеграл в (3) не зависит от  $z$ ), что результирующее поле также не будет зависеть от  $z$ :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \{H_x(x, y), H_y(x, y), H_z(x, y)\}, \quad (4)$$

причем  $H_z(x, y) = H_z^0(x, y)$ . В связи с этим, рассматривая только  $x$  и  $y$ -компоненты вектор-функций в (2) и (4), приходим из (3) к следующему виду основного уравнения магнитостатики в двумерной модели:

$$\mathbf{H}(\rho) + \frac{1}{2\pi} \nabla \int_{\Omega_2} \frac{(x-x')M_x(x',y') + (y-y')M_y(x',y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dx'dy' = \mathbf{H}^0(\rho), \quad \rho = (x, y) \notin l; \quad (5)$$

$$\mathbf{H}(\rho) = \{H_x(x, y), H_y(x, y)\}, \quad \mathbf{M}(\rho) = \{M_x(x, y), M_y(x, y)\}, \quad \mathbf{H}^0(\rho) = \{H_x^0(x, y), H_y^0(x, y)\}, \quad (6)$$

где  $l$  — граница области  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ .

### 3. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ

В настоящей работе будут исследованы обратные задачи для уравнения (5) для двух конфигураций магнетиков, удовлетворяющих перечисленным выше условиям возможности их описания в рамках двумерной модели и характерных для задач магнитного неразрушающего контроля. Первая (назовем ее «конфигурация А») такова. Имеется сплошной магнетик, занимающий пространственную область  $\Omega = \Omega_2 \times (-\infty < z < +\infty)$ , где  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$  — сечение  $\Omega$  плоскостью  $z = 0$ , к которому приложено внешнее поле  $\mathbf{H}^0$  вида (2). Допустим, что область магнетика  $\Omega$  ненаблюдаема визуально (магнетик внутри непрозрачного немагнитного тела), и измерение напряженности  $\mathbf{H}$  результирующего магнитного поля тоже, возможно, не может быть осуществлено в непосредственной близости от тела, а потому считаем, что такие измерения доступны в некоторой конечной области  $G$  плоскости  $z = 0$  вне  $\Omega_2$  (см. рис. 1). Обратная задача для уравнения (5) состоит в том, чтобы по известным напряженностям внешнего поля  $\mathbf{H}^0(\rho)$  и результирующего поля  $\mathbf{H}(\rho)$  (измеренного в области  $G$ ) вида (6) восстановить сечение магнетика  $\Omega_2$ , т.е. найти его границу  $l$ .

Вторая исследуемая конфигурация (назовем ее «конфигурация В») такова, что магнетик с сечением  $\Omega_1$  плоскостью  $z = 0$  визуально наблюдаем, а потому внешняя граница сечения  $l_1$  известна. Однако в магнетике имеется неизвестная полость с сечением  $\Omega_2 \subset \Omega_1$  и граничной кривой  $l$  (см. рис. 2). Обратная задача для уравнения (5) состоит в том, чтобы по описанным выше известным напряженностям  $\mathbf{H}^0(\rho)$  внешнего поля и результирующего  $\mathbf{H}(\rho)$  поля в некоторой конечной области  $G$  вне  $\Omega_1$  восстановить сечение полости  $\Omega_2$ , то есть найти его границу  $l$ .

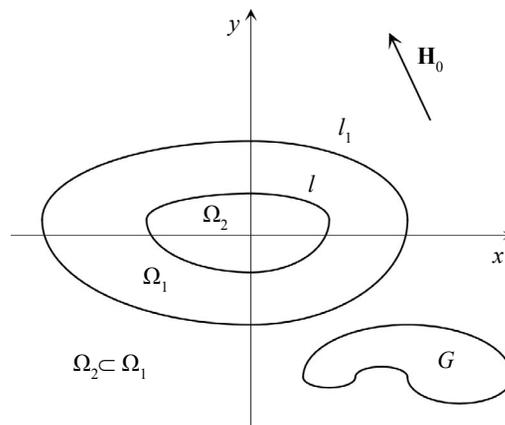


Рис. 2. Сечение магнетика с внутренней полостью.

#### 4. ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОДНОРОДНО НАМАГНИЧЕННЫХ МАГНЕТИКОВ

В настоящей работе предлагается исследование сформулированных выше обратных задач для обеих конфигураций в случае однородно намагниченного магнетика с известной намагниченностью  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \{M_x, M_y, M_z\} = \text{const}$  внутри него. Таким образом, в уравнении (5) считается известной постоянная вектор-функция

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}) \equiv \mathbf{M} = \{M_x, M_y\} = \text{const}, \quad (7)$$

а само уравнение с учетом (7) имеет вид:

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\rho}) + \frac{1}{2\pi} \nabla \int_{\Omega_2} \frac{(x-x')M_x + (y-y')M_y}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dx'dy' = \mathbf{H}^0(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} = (x, y) \notin l. \quad (8)$$

#### 5. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Для конфигурации А из (8) получаем следующее уравнение для обратной задачи магнитостатики:

$$\nabla \int_{\Omega_2} \frac{(x-x')M_x + (y-y')M_y}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dx'dy' = \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} = (x, y) \in G; \quad (9)$$

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}) := -2\pi\mathbf{H}^R(\boldsymbol{\rho}), \quad \mathbf{H}^R(\boldsymbol{\rho}) := \mathbf{H}(\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{H}^0(\boldsymbol{\rho}). \quad (10)$$

Вектор-функция  $\mathbf{H}^R(\boldsymbol{\rho}) = \{H_x^R(x, y), H_y^R(x, y)\}$  в (10) называется напряженностью так называемого поля реакции.

В конфигурации В уравнение для обратной задачи имеет вид:

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\rho}) + \frac{1}{2\pi} \nabla \int_{\Omega_1 \setminus \Omega_2} \frac{(x-x')M_x + (y-y')M_y}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dx'dy' = \mathbf{H}^0(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} = (x, y) \in G.$$

Учитывая, что  $\int_{\Omega_1 \setminus \Omega_2} \dots = \left( \int_{\Omega_1} \dots \right) - \left( \int_{\Omega_2} \dots \right)$ , получаем для конфигурации В то же уравнение (9), но его правая часть:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}) := \nabla \int_{\Omega_1} \frac{(x-x')M_x + (y-y')M_y}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dx'dy' + 2\pi\mathbf{H}^R(\boldsymbol{\rho}). \quad (11)$$

Поскольку область магнетика  $\Omega_1$  в (11) и результирующее поле  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\rho})$  в области  $G$  считаются известными (а потому известно и поле реакции  $\mathbf{H}^R(\boldsymbol{\rho})$ ), то в обеих конфигурациях А и В правая часть уравнения (9) считается известной.

Для каждой из конфигураций в рамках обратной задачи искомой является область  $\Omega_2$  или, что эквивалентно, ее граничная кривая  $l$ . Считаем, что исходная трехмерная декартова система координат выбрана так, что ее начало находится внутри области  $\Omega_2$ , как в конфигурации А, так и В, причем эта область является звездной относительно начала координат (то есть любой луч, исходящий из начала координат, пересекает граничную кривую  $l$  только в одной точке). Тогда в полярной системе координат уравнение такой кривой может быть представлено в виде:

$$l: \rho = f(\varphi), \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad (12)$$

где  $\rho$  и  $\varphi$  суть полярный радиус и полярный угол. Таким образом, обратная задача по поиску кривой  $l$  свелась к определению неизвестной функции одного переменного  $f(\varphi)$ , для которой далее и будут выведены соответствующие интегродифференциальные уравнения. Отметим для дальнейшего, что, с учетом (12), параметрическое уравнение  $l$  в декартовой системе координат имеет вид:

$$l: x = f(\varphi)\cos\varphi, y = f(\varphi)\sin\varphi, \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \quad (13)$$

Рассмотрим  $x$ -компоненту векторного уравнения (9):

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\Omega_2} \frac{(x-x')M_x + (y-y')M_y}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dx'dy' = F_x(\rho), \quad \rho = (x, y) \in G.$$

Внося производную под знак интеграла (это возможно, поскольку  $\rho = (x, y) \notin \Omega_2$ , а  $\Omega_2 \cap G = \emptyset$ ) и учитывая, что для функций, зависящих только от разности  $(x-x')$ , выполнено  $\partial/\partial x = -\partial/\partial x'$ , получаем:

$$\int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \frac{(x-x')M_x + (y-y')M_y}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right] dx'dy' = -F_x(\rho), \quad \rho = (x, y) \in G. \quad (14)$$

Используя формулу Грина [25, с. 174] преобразования двойного интеграла в криволинейный 2 рода по границе области интегрирования, из (14) имеем:

$$\int_l \frac{(x-x')M_x + (y-y')M_y}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dy' = -F_x(\rho), \quad \rho = (x, y) \in G. \quad (15)$$

Далее, следуя формуле преобразования криволинейного интеграла 2 рода в определенный интеграл [25, с. 22], с учетом параметрического уравнения (13) кривой  $l$  получаем из (15):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{xM_x + yM_y - f(\varphi)(M_x \cos\varphi + M_y \sin\varphi)}{x^2 + y^2 - 2f(\varphi)(x \cos\varphi + y \sin\varphi) + f^2(\varphi)} (f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi) d\varphi = -F_x(x, y), \quad (16)$$

$(x, y) \in G$ . Проводя аналогичные преобразования для  $y$ -компоненты векторного уравнения (9), имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{xM_x + yM_y - f(\varphi)(M_x \cos\varphi + M_y \sin\varphi)}{x^2 + y^2 - 2f(\varphi)(x \cos\varphi + y \sin\varphi) + f^2(\varphi)} (f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi) d\varphi = F_y(x, y), \quad (17)$$

$(x, y) \in G$ . Найдем выражения для правых частей уравнений (16) и (17). Для конфигурации А из (10) получаем:

$$F_x(x, y) = -2\pi H_x^R(x, y), \quad F_y(x, y) = -2\pi H_y^R(x, y). \quad (18)$$

Найдем более простые, чем в (11), выражения  $F_x(x, y)$  и  $F_y(x, y)$  для конфигурации В в предположении, что область  $\Omega_1$  тоже является звездной относительно начала координат. Тогда внешняя граница  $l_1$  сечения  $\Omega_1$  магнетика может быть описана в полярной системе координат уравнением:

$$l_1: \rho = g(\varphi), \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad (19)$$

и вид функции в (19) известен. Преобразовывая  $x$  и  $y$ -компоненты градиента интеграла в (11) аналогично преобразованиям  $x$  и  $y$ -компонент градиента интеграла в левой части (9) (т.е., внося производную под знак интеграла, используя формулу Грина и формулу преобразования криволинейного интеграла 2 рода в определенный интеграл), получаем для конфигурации В:

$$F_x(x, y) = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{xM_x + yM_y - g(\varphi)(M_x \cos\varphi + M_y \sin\varphi)}{x^2 + y^2 - 2g(\varphi)(x \cos\varphi + y \sin\varphi) + g^2(\varphi)} (g'(\varphi)\sin\varphi + g(\varphi)\cos\varphi) d\varphi + 2\pi H_x^R(x, y); \quad (20)$$

$$F_y(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{xM_x + yM_y - g(\varphi)(M_x \cos \varphi + M_y \sin \varphi)}{x^2 + y^2 - 2g(\varphi)(x \cos \varphi + y \sin \varphi) + g^2(\varphi)} (g'(\varphi) \cos \varphi - g(\varphi) \sin \varphi) d\varphi + 2\pi H_y^R(x, y). \quad (21)$$

Для поиска неизвестной функции  $f(\varphi)$  можно использовать любое из интегродифференциальных уравнений (16) или (17) с правыми частями в соответствии с (18) или (20), (21) в зависимости от вида конфигурации А или В. Далее будем «работать» с уравнением (16).

## 6. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (16)

Как отмечено во введении, основными численными методами решения интегродифференциальных уравнений являются либо замена интегралов подходящими квадратурными формулами, а производных — их разностными аналогами, либо поиск искомой функции в виде разложения ее в ряд по подходящей базисной системе функций. В каждом из этих методов задача сведется к решению системы алгебраических уравнений либо относительно значений искомой функции в узлах квадратурной формулы, либо относительно коэффициентов разложения ее в ряд. Существенная нелинейность уравнения (16) создает для численной реализации его решения значительные трудности, которые упомянуты во введении. Поскольку в случае применения метода квадратурных формул для обеспечения приемлемой точности обычно требуется использовать достаточно большое число узлов квадратурной формулы (что приводит к большому порядку упомянутых систем алгебраических уравнений), мы предпочли поиск искомой функции в виде ряда.

Поскольку искомая функция  $f(\varphi)$  в (12) является  $2\pi$ -периодичной, то будем искать ее приближение  $\bar{f}(\varphi)$  (чтобы  $f(\varphi) \approx \bar{f}(\varphi)$ ) в виде отрезка тригонометрического многочлена некоторой степени  $n$ :

$$\bar{f}(\varphi) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi + \dots + a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi. \quad (22)$$

Коэффициенты  $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$  будем искать такими, чтобы функция  $f(\varphi) = \bar{f}(\varphi)$  наилучшим образом удовлетворяла уравнению (16), т.е. его правая и левая части были бы максимально близки в выбранной метрике.

Формализуем этот критерий. Выберем каким-либо образом в области  $G$  измерения результирующего поля точки  $P_1(x_1, y_1), \dots, P_m(x_m, y_m)$  в достаточно большом их количестве и потребуем, чтобы в этих точках суммарное среднее квадратическое отклонение левой части уравнения (16) от его правой части было минимальным. Таким образом, задача сводится к минимизации функции  $2n+1$  переменного

$$Q(a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) := \sum_{i=1}^m \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x_i M_x + y_i M_y - \bar{f}(\varphi)(M_x \cos \varphi + M_y \sin \varphi)}{x_i^2 + y_i^2 - 2\bar{f}(\varphi)(x_i \cos \varphi + y_i \sin \varphi) + \bar{f}^2(\varphi)} (\bar{f}'(\varphi) \sin \varphi + \bar{f}(\varphi) \cos \varphi) d\varphi + F_x(x_i, y_i) \right\}^2, \quad (23)$$

где функция  $\bar{f}(\varphi)$  имеет вид (22), а ее производная, соответственно:

$$\bar{f}'(\varphi) = 0, \quad n = 0; \quad \bar{f}'(\varphi) = \sum_{k=1}^n (-ka_k \sin k\varphi + kb_k \cos k\varphi), \quad n \geq 1.$$

Пусть разложение искомой функции  $f(\varphi)$  в ряд Фурье имеет вид:

$$f(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) = A_0 + A_1 \cos \varphi + B_1 \sin \varphi + A_2 \cos 2\varphi + B_2 \sin 2\varphi + \dots, \quad (24)$$

где коэффициенты Фурье, как известно, определяются формулами:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi, \quad B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi, \quad k = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Реализация описанного выше численного алгоритма решения уравнения (16) должна приводить к тому, что с ростом степени  $n$  приближающего тригонометрического полинома (22) функция  $\bar{f}(\varphi)$  должна все точнее приближать искомую функцию  $f(\varphi)$ , а коэффициенты этого полинома должны приближаться к соответствующим коэффициентам Фурье (25) для  $f(\varphi)$ . Ниже это будет проверено в тестовом примере.

## 7. ИЛЛЮСТРАЦИЯ И ТЕСТИРОВАНИЕ

В качестве иллюстрации и тестирования работы предложенного алгоритма рассмотрим следующий случай конфигурации А: бесконечный однородный цилиндр с осью, параллельной оси  $z$  (см. рис. 3). Сечение цилиндра плоскостью  $Z = 0$  (т.е. область  $\Omega_2$ ) суть круг радиуса  $R$  с центром  $O(x_0, y_0)$  и граничной окружностью  $l$ , причем  $r_0 := \sqrt{x_0^2 + y_0^2} < R$  (чтобы начало координат попало внутрь  $\Omega_2$ ). Цилиндр намагничен однородно с известной намагниченностью  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \{M_x, M_y, M_z\} = \text{const}$  (как известно [16], такая намагниченность может быть создана, например, постоянным внешним полем любой интенсивности). Считаем, что цилиндр находится в непрозрачной немагнитной среде, а потому граничная окружность  $l$  его сечения  $\Omega_2$  недоступна и требуется ее восстановить.

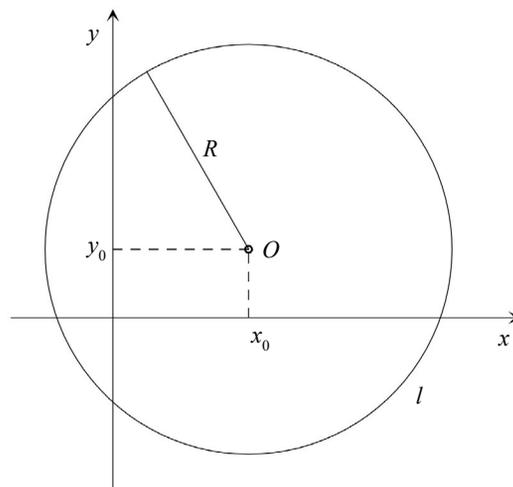


Рис. 3. Сечение бесконечного цилиндрического магнетика.

Переходя от уравнения  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$  границы  $l$  в декартовой системе координат к ее уравнению в полярной системе  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , получим следующее уравнение окружности  $l$  в полярной системе координат:

$$\rho = f(\varphi), \quad f(\varphi) = R \left[ k \cos(\varphi - \varphi_0) + \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)} \right], \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad (26)$$

где  $k := r_0/R < 1$ , а  $(r_0, \varphi_0)$  суть полярные координаты ее центра  $O(x_0, y_0)$ :

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}; \quad \varphi_0 = q, (x_0 > 0); \quad \varphi_0 = q + \pi, (x_0 < 0, y_0 \geq 0); \quad \varphi_0 = q - \pi, (x_0 < 0, y_0 < 0);$$

$$\varphi_0 = \pi/2, (x_0 = 0, y_0 > 0); \quad \varphi_0 = -\pi/2, (x_0 = 0, y_0 < 0); \quad q := \text{arctg}(y_0/x_0). \quad (27)$$

Коэффициенты Фурье для функции  $f(\varphi)$  в (26) находятся по формулам (25). Вычисляя аналитически соответствующие интегралы естественными преобразованиями с использованием справочника [26], получаем следующие формулы для коэффициентов Фурье функции  $f(\varphi)$  в (26) в разложении (24):

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{2R}{\pi} E(k), \quad A_1 = r_0 \cos \varphi_0 = x_0, \quad B_1 = r_0 \sin \varphi_0 = y_0; \\
A_2 &= \frac{4R}{3\pi k^2} \left[ (2-k^2)E(k) + 2(k^2-1)K(k) \right] \cos 2\varphi_0; \\
B_2 &= \frac{4R}{3\pi k^2} \left[ (2-k^2)E(k) + 2(k^2-1)K(k) \right] \sin 2\varphi_0, \quad A_3 = 0, \quad B_3 = 0; \\
A_4 &= \frac{4R}{15\pi k^4} \left[ 8(1-k^2)(2-k^2)K(k) + (16k^2-k^4-16)E(k) \right] \cos 4\varphi_0; \\
B_4 &= \frac{4R}{15\pi k^4} \left[ 8(1-k^2)(2-k^2)K(k) + (16k^2-k^4-16)E(k) \right] \sin 4\varphi_0,
\end{aligned} \tag{28}$$

где полные эллиптические интегралы 1 и 2 рода:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 s}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 s} ds, \quad k := \frac{r_0}{R}.$$

Компоненты поля реакции  $\mathbf{H}^R(\boldsymbol{\rho}) = \{H_x^R(x, y), H_y^R(x, y)\}$  из (10) вне такого цилиндра (т.е.  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 > R^2$ ) вычисляются аналитически [27]:

$$H_x^R(x, y) = \frac{R^2 \left[ M_x \left( (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 \right) + 2M_y (x-x_0)(y-y_0) \right]}{2 \left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right]^2}, \tag{29}$$

$$H_y^R(x, y) = \frac{R^2 \left[ 2M_x (x-x_0)(y-y_0) + M_y \left( (y-y_0)^2 - (x-x_0)^2 \right) \right]}{2 \left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right]^2}. \tag{30}$$

Отметим, что в качестве численной проверки основных уравнений методики (16) и (17), а также формул (29) и (30), проверялись наличие равенств в (16) и (17) при подстановке в их левые части  $f(\varphi)$  из (26), а в правые — (29) и (30) соответственно.

В качестве точек  $P_1(x_1, y_1), \dots, P_m(x_m, y_m)$  измерения напряженности результирующего поля вне рассматриваемого цилиндра выбраны точки, равномерно расположенные на окружности  $l_1$  радиуса  $R_1$  ( $R_1 > R$ ) с центром в точке  $O(x_0, y_0)$  (таким образом, окружность  $l_1$  и искомая окружность  $l$  являются концентрическими):

$$x_i = x_0 + R_1 \cos \left[ \frac{2(i-1)\pi}{m} \right], \quad y_i = y_0 + R_1 \sin \left[ \frac{2(i-1)\pi}{m} \right], \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Значения  $F_x(x_i, y_i)$  в этих точках для  $F_x(x, y)$  в минимизируемой функции (23) вычислялись по формулам (18), (29).

Опишем результаты численного процесса восстановления граничной окружности  $l$  сечения цилиндра предлагаемой методикой. С ростом степени  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) тригонометрического полинома (22), коэффициенты которого определяются минимизацией функции среднеквадратичного отклонения (23), сами эти коэффициенты должны приближаться к коэффициентам Фурье (28) функции  $f(\varphi)$  в (26), а график этого полинома  $\rho = f(\varphi)$  должен, соответственно, приближаться к окружности  $l$  сечения цилиндра с центром  $O(x_0, y_0)$  и радиуса  $R$ . Численная минимизация функции (23) проводилась методом покоординатного спуска [28] (пробовался и метод сопряженных направлений Пауэлла [28], но он оказался менее эффективным).

Опишем результаты численного процесса восстановления (с ростом степени  $n$  тригонометрического полинома (22)) граничной окружности  $l$  сечения цилиндра минимизацией функции среднеквадратичного отклонения (23) (метод наименьших квадратов). Для описываемого здесь вычислительного эксперимента были взяты следующие параметры задачи: декартовы координаты центра  $O(x_0, y_0)$  окружности  $l$  в сечении цилиндра  $x_0 = 4, y_0 = 2$ , радиус окружности  $R = 7$ , радиус концентрической окружности  $l_1$ , на которой выбраны точки измерения напряженности результирующего поля,  $R_1 = 12$ , количество выбранных точек измерения результирующего поля  $m = 100$ , компоненты постоянной намагниченности внутри цилиндра  $M_x = 2, M_y = 1$ .

Далее опишем приближение с ростом степени  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) коэффициентов оптимального тригонометрического полинома (22) к коэффициентам Фурье (28) функции  $f(\varphi)$  в (26), а также приближение графика  $\rho = \bar{f}(\varphi)$  этого полинома к окружности  $l$  сечения цилиндра с центром  $O(x_0, y_0)$  и радиуса  $R$ . Коэффициенты Фурье функции  $f(\varphi)$  в (26), вычисленные по формулам (28) для приведенных выше значений параметров задачи, таковы:

$$\begin{aligned} A_0 = 6,21893, \quad A_1 = 4, \quad B_1 = 2, \quad A_2 = 0,483419, \quad B_2 = 0,644559, \\ A_3 = 0, \quad B_3 = 0, \quad A_4 = 0,007337836, \quad B_4 = -0,0251583. \end{aligned} \quad (31)$$

Для иллюстрации эффективности процесса численной минимизации среднеквадратичного отклонения (23) будет приводиться среднее (по всем точкам  $P_1(x_1, y_1), \dots, P_m(x_m, y_m)$  измерения результирующего поля) значение отклонения  $S_n(a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) := \sqrt{Q(a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)/m}$  в задаваемой начальной точке итерационного процесса численной минимизации функции (23) и в точке выдаваемой программой конечной точке — точке минимума.

При  $n = 0$  приближающий тригонометрический полином (22) имеет простейший вид  $\bar{f}(\varphi) = a_0$  с одним искомым коэффициентом  $a_0$ . Его поиск минимизацией функции (23), имеющей в этом случае вид:

$$Q(a_0) = \sum_{i=1}^m \left[ a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x_i M_x + y_i M_y - a_0 (M_x \cos \varphi + M_y \sin \varphi)}{x_i^2 + y_i^2 - 2a_0(x_i \cos \varphi + y_i \sin \varphi) + a_0^2} \cos \varphi d\varphi + F_x(x_i, y_i) \right]^2, \quad (32)$$

равносилен поиску радиуса  $a_0$  окружности с центром в начале координат, которая является сечением цилиндра с той же намагниченностью и дающего на окружности  $l_1$  наиболее близкие значения напряженности результирующего поля к тем, что дает исследуемый цилиндр. Интеграл в (32) для этого случая вычисляется аналитически по формуле:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{ax + by - c(a \cos \varphi + b \sin \varphi)}{x^2 + y^2 - 2c(x \cos \varphi + y \sin \varphi) + c^2} \cos \varphi d\varphi = \begin{cases} \frac{\pi c [a(x^2 - y^2) + 2bxy]}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 > c^2 \\ -\frac{\pi a}{c}, & x^2 + y^2 < c^2 \end{cases},$$

а потому искомым параметр  $a_0$  (а точнее, его квадрат  $a_0^2$ ) входит в выражение в квадратных скобках (32) для  $Q(a_0)$  линейно. В этом случае метод наименьших квадратов дает аналитический ответ:

$$a_0 = R \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m D(x_i, y_i, M_x, M_y) D(x_i - x_0, y_i - y_0, M_x, M_y)}{\sum_{i=1}^m [D(x_i, y_i, M_x, M_y)]^2}}, \quad (33)$$

где  $D(x, y, a, b) := [a(x^2 - y^2) + 2bxy] / (x^2 + y^2)^2$ . Подстановка в (33) приведенных выше значений параметров задачи дает  $a_0 = 5,24$ , что пока еще не является хорошим (хотя и не таким уж плохим) приближением для приведенного в (31) точного значения нулевого коэффициента Фурье  $A_0 = 6,21893$  искомой функции  $f(\varphi)$  в (26). Отметим, что компьютерная численная минимизация функции  $Q(a_0)$  в (32) упоминавшимся методом покоординатного спуска (да и методом Пауэлла тоже) дала, естественно, то же значение для  $a_0$ . Среднее поточечное отклонение

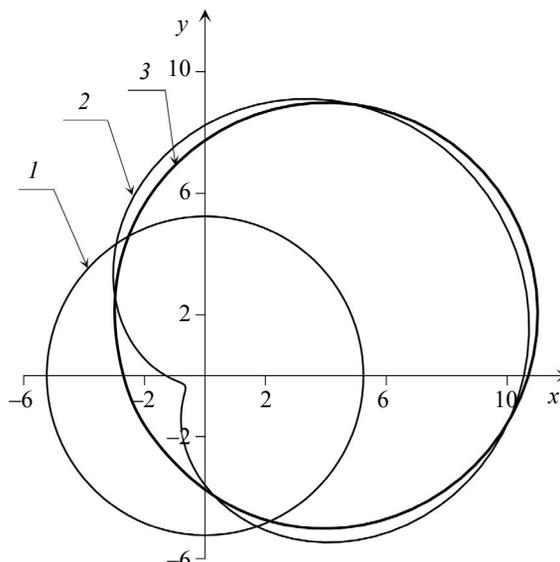


Рис. 4. Приближение к сечению магнетика с ростом степени приближающего тригонометрического полинома.

$S_0(a_0) = \sqrt{Q(a_0)}/100$  для начального приближения  $a_0 = 1$  уменьшилось с  $S_0(1) = 1,65$  до  $S_0(5,24) = 1,12$ . График функции  $\rho = \bar{f}(\varphi)$  в этом случае будет графиком функции  $\rho = 5,24$  и является окружностью такого радиуса с центром в начале координат (см. рис. 4, кривая 1). Понятно, что при  $n = 0$  мы получили пока плохую аппроксимацию границы  $l$  сечения исследуемого цилиндра, которая является окружностью радиуса  $R = 7$  с центром  $O(4; 2)$ .

При  $n = 1$  приближающий тригонометрический полином (22) имеет вид:

$$\bar{f}(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi \quad (34)$$

с искомыми коэффициентами  $a_0, a_1, b_1$ . Минимизируемая функция  $Q(a_0, a_1, b_1)$  имеет вид (23) при подстановке (34). Типичные результаты численной минимизации следующие. При начальном приближении  $a_0 = 1, a_1 = 1, b_1 = 0$  получен минимум в точке  $a_0 = 5,92, a_1 = 4,63, b_1 = 2,32$ . Заметим, что начальное приближение взято достаточно далеко от точных коэффициентов Фурье (31)  $A_0 = 6,21893, A_1 = 4, B_1 = 2$  искомой функции  $f(\varphi)$ , однако точка минимума уже неплохо их аппроксимирует. Среднее поточечное отклонение  $S_1(a_0, a_1, b_1) = \sqrt{Q(a_0, a_1, b_1)}/100$  для начального приближения уменьшилось с  $S_1(1, 1, 0) = 1,64$  до  $S_1(5,92, 4,63, 2,32) = 1,35$ . График функции  $\rho = \bar{f}(\varphi)$  в этом случае будет графиком функции  $\rho = 5,92 + 4,63 \cos \varphi + 2,32 \sin \varphi$  и приведен на рис. 4, кривая 2. Видно, что движение пошло в нужную сторону (по сравнению с  $n = 0$ ), но пока еще получили не достаточно хорошую аппроксимацию границы  $l$  сечения исследуемого цилиндра, которая является окружностью радиуса  $R = 7$  с центром  $O(4; 2)$ .

При  $n = 2$  приближающий тригонометрический полином (22) имеет вид:

$$\bar{f}(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi + a_2 \cos 2\varphi + b_2 \sin 2\varphi \quad (35)$$

с искомыми коэффициентами  $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2$ . Минимизируемая функция  $Q(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2)$  имеет вид (23) при подстановке (35). Опишем типичные результаты численной минимизации этой функции пяти переменных. При начальном приближении  $a_0 = 1, a_1 = 1, b_1 = 0, a_2 = 2, b_2 = 2$  итерационный процесс минимизации дает минимум в точке  $a_0 = 6,2184, a_1 = 4,0023, b_1 = 2,0011, a_2 = 0,48004, b_2 = 0,64005$ . Видно, что уже при  $n = 2$  численная минимизация функции (23) дает практически точные значения первых пяти коэффициентов Фурье (31) искомой функции  $f(\varphi)$  в (26) при выбранных значениях параметров. Среднее поточечное отклонение  $S_2(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2) = \sqrt{Q(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2)}/100$  уменьшилось в процессе минимизации со значения 1,51 для начального приближения до 0,0041 в точке минимума. График функции  $\rho = \bar{f}(\varphi)$  в этом случае будет графиком функции  $\rho = 6,2184 + 4,0023 \cos \varphi + 2,0011 \sin \varphi + 0,48004 \cos 2\varphi + 0,64005 \sin 2\varphi$  и приведен на рис. 4, кривая 3. Видно, что этот график уже практически не отличим от искомой границы  $l$  сечения исследуемого цилиндра, которая явля-

ется окружностью радиуса  $R = 7$  с центром  $O(4; 2)$ . Важно подчеркнуть, что начальные значения для итерационного процесса численной минимизации функции (23) брались достаточно далеко от искомого минимума, что говорит о достаточно широкой так называемой «области притяжения» точки минимума для используемого алгоритма численной минимизации в рассматриваемом примере.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение кратко сформулируем основные результаты, полученные в настоящей работе.

1. В рамках изучения обратной задачи магнитостатики в двумерном случае для однородно намагниченных тел получены одномерные интегродифференциальные уравнения (16), (17) на функцию одного переменного  $f(\varphi)$  для определения формы магнетика или полости в нем по измеренной напряженности результирующего поля вне тела.

2. Приближенное решение этих уравнений ищется в виде тригонометрического полинома конечной степени, коэффициенты которого являются точкой минимума функции соответствующего числа переменных (23).

3. В качестве тестового и иллюстративного примера работы предложенного алгоритма восстановлена форма и положение «сдвинутого» однородного бесконечного кругового цилиндра, находящегося в непрозрачной и немагнитной среде.

4. Составлена программа на языке Фортран, реализующая предложенную методику.

5. Следует заметить, что при практическом применении предлагаемой методики для определения формы и размеров однородно намагниченного магнетика в непрозрачной и немагнитной среде или формы и размеров полости в визуально наблюдаемом магнетике могут возникнуть два проблемных момента. Первый из них связан с тем, что для применения методики начало выбранной используемой декартовой системы координат должно попасть внутрь магнетика или, соответственно, внутрь полости в нем, хотя эти области визуально не наблюдаемы. Второй момент связан со следующим. Хотя в разобранный в настоящей работе тестовом примере оказалось, что точка глобального минимума функции (23) обладает широкой областью притяжения (а потому высока вероятность попасть в нее при выборе начального приближения для итерационного процесса минимизации), такой благоприятный факт может не иметь места для магнетиков или полостей другой формы. Стандартный (но и достаточно хлопотный) прием избавления от этих проблем состоит в многократном повторении методики для различных выбираемых положений начала системы координат и начальной точки итерационного процесса минимизации и сравнении получаемых локальных минимумов для поиска точки глобального минимума функции (23), параметры которой будут указывать на границу реального сечения магнетика или полости в нем. Однако возможно, что пользователь придумает более изящное и простое решение этих проблем. Впрочем, эти проблемы могут и не возникнуть (как, например, в разобранный тестовом примере).

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России для ИФМ УрО РАН. Шифр «Квант» Г.р. № 122021000038-7.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Печенков А.Н., Щербинин В.Е. Некоторые прямые и обратные задачи технической магнитостатики. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2004. 177 с.
2. Печенков А.Н., Щербинин В.Е. О решении обратной задачи магнитостатической томографии // Дефектоскопия. 2009. № 3. С. 37—55.
3. Печенков А.Н., Щербинин В.Е. К вопросу о неединственности решения обратной задачи магнитостатической дефектоскопии // Контроль. Диагностика. 2006. № 9. С. 59—60.
4. Печенков А.Н. О влиянии формы тела на единственность решения обратной задачи магнитостатической дефектоскопии // Дефектоскопия. 2006. № 10. С. 24—26.
5. Дякин В.В. Прямая и обратная задача магнитостатики // Дефектоскопия. 1996. № 3. С. 3—6.
6. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. К вопросу о корректности прямой и обратной задачи магнитостатики. Часть 2 // Дефектоскопия. 2018. № 10. С. 15—24.
7. Реутов Ю.Я., Гобов Ю.Л., Лоскутов В.Е. О возможностях использования программы ELCUT в расчетах по дефектоскопии // Дефектоскопия. 2002. № 6. С. 34—40.
8. Заидулин Р.В., Дякин В.В., Дударев М.С., Щербинин В.Е. К определению геометрических размеров поверхностного дефекта / Физические методы и приборы НК. Тезисы докладов X Уральской научной технической конференции. Ижевск. 1989. С. 83.
9. Новослугина А.П., Смородинский Я.Г. Расчетный способ оценки параметров дефектов в сталях // Дефектоскопия. 2017. № 11. С. 13—19.
10. Дякин В.В., Раевский В.Я., Кудряшова О.В. Поле конечного дефекта в пластине // Дефектоскопия. 2009. № 3. С. 67—79.

11. Кротов Л.Н. Реконструкция границы раздела сред по пространственному распределению магнитного поля рассеяния. 1. Исследование свойств решения вспомогательной прямой задачи // Дефектоскопия. 2004. № 2. С. 76—82.
12. Кротов Л.Н. Реконструкция границы раздела сред по пространственному распределению магнитного поля рассеяния. 2. Постановка и метод решения обратной геометрической задачи магнитостатики // Дефектоскопия. 2004. № 6. С. 76—82.
13. Слесарев Д.А., Барат В.А., Чобану П.М. Снижение погрешности статистического метода оценки параметров дефектов в магнитной дефектоскопии // Дефектоскопия. 2012. № 1. С. 69—74.
14. Гобов Ю.Л., Никитин А.В., Попов С.Э. Решение обратной геометрической задачи магнитостатики для дефектов коррозии // Дефектоскопия. 2018. № 10. С. 51—57.
15. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. Обратная задача магнитостатики в полях насыщения // Дефектоскопия. 2019. № 10. С. 35—44.
16. Ахиезер А.И. Общая физика. Электрические и магнитные явления. Киев: Наукова думка, 1981. 471 с.
17. Печенков А.Н., Щербинин В.Е. Метод создания однородной намагниченности и определения магнитной восприимчивости // Дефектоскопия. 2002. № 7. С. 47—50.
18. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. 279 с.
19. Friedman M.J. Mathematical Study of the Nonlinear Singular Integral Magnetic Field Equation. 1. // SIAM J. Appl. Math. 1980. V. 39. No. 1. P. 14—20.
20. Friedman M.J. Mathematical Study of the Nonlinear Singular Integral Magnetic Field Equation. 2. // SIAM J. Numer. Anal. 1981. V. 18. No. 4. P. 644—653.
21. Friedman M.J. Mathematical Study of the Nonlinear Singular Integral Magnetic Field Equation. 3. // SIAM J. Math. Anal. 1981. V. 12. No. 4. P. 536—540.
22. Дякин В.В. Математические основы классической магнитостатики. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2016. 403 с.
23. Раевский В.Я. О свойствах квазиэрмитовых операторов и их применении к исследованию операторов теории потенциала и основного уравнения электро- и магнитостатики / Препринт № 24/48(01). Екатеринбург: ИФМ УрО РАН, 2001.
24. Раевский В.Я. Некоторые свойства операторов теории потенциала и их применение к исследованию основного уравнения электро- и магнитостатики // Теоретическая и математическая физика. 1994. Т. 3. № 100. С. 323—331.
25. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1966. 656 с.
26. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 1. М.: Физматлит, 2003. 632 с.
27. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. Расчет напряженности магнитного поля внутри и вне бесконечного цилиндра, помещенного в произвольное внешнее поле // Дефектоскопия. 2024. № 3. С. 33—46.
28. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2002. 544 с.

## REFERENCES

1. Pechenkov A N., Shcherbinin V.E. Nekotorye pryamye i obratnye zadachi tekhnicheskoy magnitostatiki. Ekaterinburg: Izd-vo UrO RAN, 2004. 177s.
2. Pechenkov A.N., Shcherbinin V.E. O reshenii obratnoj zadachi magnitostaticheskoy tomografii // Defektoskopiya. 2009. No 3. P. 37—55.
3. Pechenkov A.N., Shcherbinin V.E. K voprosu o needinstvennosti resheniya obratnoj zadachi magnitostaticheskoy defektoskopii // Kontrol'. Diagnostika. 2006. No. 9. P. 59—60.
4. Pechenkov A.N. O vliyaniy formy tela na edinstvennost' resheniya obratnoj zadachi magnitostaticheskoy defektoskopii // Defektoskopiya. 2006. № 10. P. 24—26.
5. Dyakin V.V. Pryamaya i obratnaya zadacha magnitostatiki // Defektoskopiya. 1996. No. 3. P. 3—6.
6. Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskij V.Ya. K voprosu o korrektnosti pryamoj i obratnoj zadachi magnitostatiki. Chast' 2 // Defektoskopiya. 2018. No. 10. P. 15—24.
7. Reutov Yu.Ya., Gobov Yu.L., Loskutov V.E. O vozmozhnostyah ispol'zovaniya programmy ELCUT v raschetah po defektoskopii // Defektoskopiya. 2002. No. 6. P. 34—40.
8. Zagidulin R.V., Dyakin V.V., Dudarev M.S., Shcherbinin V.E. K opredeleniyu geometricheskikh razmerov poverhnostnogo defekta / Fizicheskie metody i pribory NK. Tezisy dokladov X Ural'skoj nauchnoj tekhnicheskoy konferencii. Izhevsk. 1989. P. 83.
9. Novoslugina A.P., Smorodinskij Ya.G. Raschetnyj sposob ocenki parametrov defektov v stalyah // Defektoskopiya. 2017. No. 11. P. 13—19.
10. Dyakin V.V., Raevskij V.Ya., Kudryashova O.V. Pole konechnogo defekta v plastine // Defektoskopiya. 2009. No. 3. P. 67—79.
11. Krotov L.N. Rekonstrukciya granicy razdelas sred po prostranstvennomu raspredeleniyu magnitnogo polya rasseyaniya. 1. Issledovanie svojstv resheniya vspomogatel'noj pryamoj zadachi // Defektoskopiya. 2004. No. 2. P. 76—82.

12. *Krotov L.N.* Rekonstrukciya granicy razdela sred po prostranstvennomu raspredeleniyu magnitnogo polya rassseyaniya. 2. Postanovka i metod resheniya obratnoj geometricheskoj zadachi magnitostatiki // Defektoskopiya. 2004. No. 6. P. 76—82.
13. *Slesarev D.A., Barat V.A., Chobanu P.M.* Snizhenie pogreshnosti statisticheskogo metoda ocenki parametrov defektov v magnitnoj defektoskopii // Defektoskopiya. 2012. No. 1. P. 69—74.
14. *Gobov Yu.L., Nikitin A.V., Popov S.E.* Reshenie obratnoj geometricheskoj zadachi magnitostatiki dlya defektov korrozii // Defektoskopiya. 2018. No. 10. P. 51—57.
15. *Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskij V.Ya.* Obratnaya zadacha magnitostatiki v polyah nasyshcheniya // Defektoskopiya. 2019. No. 10. P. 35—44.
16. *Ahiezher A.I.* Obshchaya fizika. Elektricheskie i magnitnye yavleniya. Kiev: Naukova dumka, 1981. 471 p.
17. *Pechenkov A.N., Shcherbinin V.E.* Metod sozdaniya odnorodnoj namagnichennosti i opredeleniya magnitnoj vospriimchivosti // Defektoskopiya. 2002. No. 7. P. 47—50.
18. *Hizhnyak N.A.* Integral'nye uravneniya makroskopicheskoj elektrodinamiki. Kiev: Naukova dumka, 1986. 279 p.
19. *Friedman M.J.* Mathematical Study of the Nonlinear Singular Integral Magnetic Field Equation. 1. // SIAM J. Appl. Math. 1980. V. 39. No. 1. P. 14—20.
20. *Friedman M.J.* Mathematical Study of the Nonlinear Singular Integral Magnetic Field Equation. 2. // SIAM J. Numer. Anal. 1981. V. 18. No. 4. P. 644—653.
21. *Friedman M.J.* Mathematical Study of the Nonlinear Singular Integral Magnetic Field Equation. 3. // SIAM J. Math. Anal. 1981. V. 12. No. 4. P. 536—540.
22. *Dyakin V.V.* Matematicheskie osnovy klassicheskoj magnitostatiki. Ekaterinburg: RIO UrO RAN, 2016. 403 p.
23. *Raevskij V.Ya.* O svojstvakh kvaziermitovykh operatorov i ih primeneni k issledovaniyu operatorov teorii potentsiala i osnovnogo uravneniya elektro- i magnitostatiki / Preprint № 24/48(01). Ekaterinburg: IFM UrO RAN, 2001.
24. *Raevskij V.Ya.* Nekotorye svojstva operatorov teorii potentsiala i ih primeneni k issledovaniyu osnovnogo uravneniya elektro- i magnitostatiki // Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika. 1994. V. 3. No. 100. P. 323—331.
25. *Fihtengol'c G.M.* Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 3. M.: Nauka, 1966. 656 p.
26. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integraly i ryady. T. 1. M.: Fizmatlit, 2003. 632 p.
27. *Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskij V.Ya.* Raschet napryazhennosti magnitnogo polya vnuti i vne beskonechnogo cilindra, pomeshchennogo v proizvol'noe vneshnee pole // Defektoskopiya. 2024. No. 3. P. 33—46.
28. *Panteleev A.V., Letova T.A.* Metody optimizatsii v primerah i zadachah. M.: Vyssh. shk., 2002. 544 p.